Tikslieji mokslai humanitarams



II dalis

Bjørn Felsager, Kurt Jakobsen,
Gert Schomacker, Mette Vedelsby

Bjørn Felsager, Kurt Jakobsen,
Gert Schomacker, Mette Vedelsby

Tikslieji mokslai humanitarams

II dalis

TEV

VILNIUS 1999



Knyga išleista Atviros Lietuvos fondui parėmus

Darbo vadovas: *Elmundas Žalys*

Vertėjai ir vertimo redaktoriai: *Algimantas Ažusienis, Edmundas Kuokštis, Juozas Mačys, Vilius Stakėnas, Andrius Stašaitis, Rimantas Vaitkus*

Redaktoriai: *Rita Julija Klimkienė, Valdas Vanagas*

Programinė įranga: *Tadeuš Šeibak*

Kompiuterinė grafika: *Ingrida Lukošiūtė, Inga Paukštienė*

Gamybos vadovas: *Algimantas Paškevičius*

Teksto kompiuterinis rinkimas ir maketavimas: *Nijolė Drazdauskienė, Celestina Grendienė, Nijolė Pragarauskienė, Aldona Žalienė*

Kalbos konsultantė: *Rimantė Umbrasaitė*

NATURFAG 2
Bjørn Felsager, Kurt Jakobsen,
Gert Schomacker, Mette Vedelsby

Original Danish edition published by

TIKSLIEJI MOKSLAI HUMANITARAMS
II DALIS

ISBN 9986-546-74-5 (2 dalis)
ISBN 9986-546-44-3 (2 dalys)

Pratarmė

Knygos „Tikslieji mokslai humanitarams“ apima privalomąjį Danijos mokyklų gamtos mokslų kursą humanitarams, tačiau į jas įtraukta ir laisvai pasirenkamos medžiagos. Taip pat pateikta pratybų medžiagos, sukauptos po teorinės dalies einančiame užduočių skyriuje.

Knygos skyriai tarpusavyje bemaž nesusiję, tad skaitytojui nebūtina juos skaityti iš eilės. Pavyzdžiui, 6-ą skyrių kuo puikiausiai galima skaityti ir prieš 3-ią ar 4-ą. Tokia knygos sandara siekėme padėti skaitytojui aiškiau aprėpti visumą, taip pat suteikti laisvės nagrinėjant atskiras temas.

Privalomų pirmų dviejų skyrių dėmesio centre – augimas matematine prasme. 1-o skyriaus tema – palūkanų skaičiavimas, 2-ame nagrinėjami įvairūs augimo modeliai.

3-iame ir 4-ame skyriuose įvairiais aspektais analizuojama branduolio fizika. 3-iame aprašomos pagrindinės branduolinės reakcijos, o 4-ame kalbama apie branduolinę energiją ir branduolinį ginklą.

5-ame skyriuje pateikiama neprivaloma medžiaga apie ornamentus, kur atskleidžiamas ryšys tarp žmogaus kūrybinių meninių ir matematinių analitinių galių.

6-ame skyriuje – vėl privalomoji medžiaga apie rūgštis, bazes ir pH sąvoką.

7-ame ir 8-ame skyriuose pateikiama įvairi laisvai pasirenkama fizikos ir matematikos medžiaga. 7-ame išsamiai nušviečiama funkcijos sąvoka. 8-ame kalbama apie trigonometriją bei įvairius jos taikymus.

9-ame skyriuje baigiami nagrinėti I knygos dalyje pradėti binominiai skirstiniai. Ypač daug dėmesio kreipiama į mažųjų skaičių dėsnį, suteikiantį galimybę griežčiau kalbėti apie retus įvykius.

Knyga baigiama dviem astronomijos skyriais. 10-ame, pateikiant istorinių pasaulio vaizdo pavyzdžių, pasakojama, kaip įvairiais laikais buvo suvokiama Saulės sistemos sąranga, o 11-as skyrius – raktas į šiuolaikinį pasaulio vaizdą.

Nagrinėjant 3, 4, 6 ir 9-ą knygos skyrius yra daug progų paliesti aktualias ekologijos problemas.

Tekste pateikiamos nuorodos į užduotis – pavyzdžiui, simbolis 513 reiškia, kad nukreipiama į užduotį Nr. 513, t. y. į 5-o skyriaus 13-ąją užduotį. Daugumoje skyrių šiek tiek pavyzdžių bei pratimų įpinta ir į pačią dėstomąją medžiagą. Jie pažymėti stora pilka linija paraštėje.

Yra knygoje ir papildomos medžiagos, kuri išskirta pilku fonu – ne dėl to, kad yra ne tokia svarbi ar kad svarbesnė, o kad ją galima praleisti be jokio nuostolio bendram turinio supratimui.

Autoriai

Pratarmė lietuviškajam leidimui

Gali atsitikti taip, kad ši knyga bus vienas iš paskutinių Atviros Lietuvos fondo programos „Švietimas Lietuvos ateičiai" leidinių. Nors pačios programos nebeliks, daugelis leidėjų, moksleivių, mokytojų, mokslininkų ilgai džiaugsis ir naudosis leidiniais, išėjusiais šios programos dėka.

„Tiksliųjų mokslų humanitarams" dvitomis reikšmingas tuo, kad padėjo pamatus naujam, humanizuotam gamtos mokslų mokymui Lietuvos mokykloje. Kai šios knygos buvo pradėtos rengti spaudai, niekas negalėjo net įsivaizduoti baigiamųjų egzaminų be matematikos. Dabar tai jau realybė, o neilgai trukus, matyt, galima tikėtis ir bendros visų gamtos mokslų disciplinos bei (galbūt) egzamino humanitarinėse klasėse ar gimnazijose.

Kaip jau minėjome I dalies pratarmėje, Danijos mokyklų programos gerokai skiriasi nuo lietuviškųjų. Visus, kurie rimtai nagrinės šiame vadovėlyje pateiktą medžiagą, norime įspėti, kad net puikiai išmokus viską, kas čia išdėstyta, neįmanoma išlaikyti jokio Lietuvos vidurinės mokyklos egzamino. Bet tokio tikslo ir neturėta nusprendus išversti ir parengti spaudai šią knygą. Norėjome tik parodyti, kad galima (ir reikia) parengti panašų kursą mūsų moksleiviams – tiems, kurie dabar kankinasi negalėdami suprasti fundamentalių matematikos, fizikos ar chemijos idėjų, dažnai komentuojamų dar sudėtingesniais išvedžiojimais ir keliaaukštėmis formulėmis.

Tegu ši knyga bus pirmasis žingsnis į paprastesnį pagrindinių gamtos mokslų teiginių aiškinimą, priimtiną didžiajai daugumai moksleivių, neketinančių tapti tiksliųjų mokslų korifėjais. Papildydami danų leidimą, šioje dalyje įdėjome Pietų pusrutulio žvaigždėlapį (I dalyje buvo Šiaurės pusrutulio) ir 1998 metų Danijos mokyklos baigiamųjų egzaminų humanitarinių klasių moksleiviams pavyzdžius.

Knygos matematikos skyrius rengė dr. Vilius Stakėnas, fizikos – hab. dr. Edmundas Kuokštis, astronomijos – dr. Algimantas Ažusienis, chemijos – dr. Rimantas Vaitkus.

Pastabas ir pasiūlymus prašom siųsti į leidyklą adresu:

Akademijos g. 4, Vilnius 2600; el. paštas: tev@ktl.mii.lt

Leidėjai

Turinys

1.	**Skolinimasis ir taupymas**	*11*
1.1	Procentų skaičiavimas	*11*
1.2	Palūkanų skaičiavimas	*12*
1.3	Sudėtinių palūkanų formulė	*19*
1.4	Taupymas ir paskolos	*22*
2.	**Augimas**	*27*
2.1	Augimo modeliai	*28*
2.2	Tiesinis augimas (suminis augimas)	*28*
2.3	Eksponentinis augimas	*32*
2.4	Dvigubėjimo ir puskiekio periodas	*37*
2.5	Eksponentinio augimo modelių grafikai	*39*
2.6	Ribojamas augimas	*43*
2.7	Kombinuotasis augimas	*47*
2.8	Kombinuotojo augimo lentelės	*51*
2.9	Laipsninės funkcijos	*55*
3.	**Radioaktyvumas**	*58*
3.1	Įvadas	*59*
3.2	Atomų branduoliai	*61*
3.3	Alfa, beta ir gama skilimas	*63*
3.4	Skilimo dėsnis	*68*
3.5	Aktyvumas	*71*
3.6	Praktinis radioaktyvumo taikymas	*73*
3.7	Radioaktyviosios spinduliuotės sugertis	*79*
3.8	Spinduliuotė	*81*
3.9	Biologinis jonizuojančiosios spinduliuotės poveikis	*84*
4.	**Branduolio energija**	*88*
4.1	Masė ir energija	*89*
4.2	Sunkiųjų branduolių dalijimasis	*96*
4.3	Sunkiųjų branduolių sintezė	*100*
4.4	Branduolinis ginklas	*101*

5. **Ornamentai** *107*
5.1 Įvadas *108*
5.2 Juostos judesiai *109*
5.3 Ornamentai *112*
5.4 Ornamentų tipai *114*

6. **Rūgštingumas** *120*
6.1 Rūgštys ir bazės *120*
6.2 Rūgščių ir bazių reakcijos *124*
6.3 Kaip matuojama koncentracija *130*
6.4 Rūgščių ir bazių titravimas *133*
6.5 pH sąvokos patikslinimas *134*
6.6 Rūgštieji lietūs *136*

7. **Funkcijos** *143*
7.1 Įvadas *143*
7.2 Funkcijos sąvoka *144*
7.3 Daugianariai *151*
7.4 Kaip lentelėje atpažinti daugianarį? *163*

8. **Kampo sinusas** *166*
8.1 Sinusas ir kosinusas *166*
8.2 Trikampių sprendimas *168*
8.3 Šviesos lūžimo dėsnis *173*
8.4 Visiškas atspindys *179*
8.5 Vaivorykštė *183*

9. **Sėkmių skaičius** *185*
9.1 Įvadas *185*
9.2 Binominiai skirstiniai *186*
9.3 Retųjų įvykių dėsnis *193*
9.4 Kiti binominio skirstinio taikymai *195*

10. Pasaulio vaizdas *199*
10.1 Įvadas *199*
10.2 Klasikinis pasaulio vaizdas *202*
10.3 Plika akimi *207*
10.4 Sistema atsistoja į savo vietą *210*
10.5 Sintezė *216*

11. Raktas į Visatą *218*
11.1 Įvadas *218*
11.2 Kosminiai nuotoliai *218*
11.3 Paukščių Takas *222*
11.4 Ar Paukščių Tako galaktika vienintelė Visatoje? *225*
11.5 Kosmologinis raudonasis poslinkis *229*
11.6 Visatos sutvėrimas *236*

Užduotys *239*
1 skyriaus užduotys *239*
2 skyriaus užduotys *241*
3 skyriaus užduotys *251*
4 skyriaus užduotys *258*
5 skyriaus užduotys *261*
6 skyriaus užduotys *265*
7 skyriaus užduotys *271*
8 skyriaus užduotys *282*
9 skyriaus užduotys *288*
10 skyriaus užduotys *292*
11 skyriaus užduotys *298*

Egzaminų užduotys *305*

Dalykinė ir vardų rodyklė *311*

1. Skolinimasis ir taupymas



1.1. Procentų skaičiavimas

Procentas (%) reiškia tam tikro dydžio šimtąją dalį, t. y.

$$1\% \text{ yra } \frac{1}{100} \text{ dalis} = 0{,}01, \quad 27\% \text{ yra } \frac{27}{100} \text{ dalys} = 0{,}27 \text{ ir t. t.}$$

Taigi kiekvieną *procentų skaičių* galima užrašyti kaip *dešimtainę trupmeną* ir kiekvieną trupmeną – kaip procentų skaičių, pvz.:

$$\frac{2}{5} = \frac{40}{100}, \text{ t. y. } 40\%, \quad \frac{2}{3} = 0{,}666\ldots, \text{ t. y. } \approx 66{,}67\%.$$

Susitarkime procentų skaičių žymėti raide p, o atitinkamą dešimtainę trupmeną – raide r:

$$r \text{ atitinka } p\%, \text{ t. y. } r = \frac{p}{100}.$$

Pavyzdžiui, jei procentų skaičius yra $p = 27$, tai atitinkanti jį dešimtainė trupmena yra $r = 0{,}27$.
Bet kokio skaičiaus $p\%$ gauname padauginę tą skaičių iš $\frac{p}{100}$ arba iš r.

Tai atliekama tokiu pat būdu, kaip ir ieškant tam tikro dydžio dalies, pavyzdžiui:

$$\frac{2}{5} \text{ skaičiaus 40 yra } \frac{2}{5} \cdot 40 = \frac{2 \cdot 40}{5} = 16.$$

$$30\% \text{ skaičiaus 240 yra } \frac{30}{100} \cdot 240 = 0{,}30 \cdot 240 = 72.$$

101

1.2. Palūkanų skaičiavimas

1980 m. Žemėje gyveno 4,4 milijardo žmonių. Per penkerius metus gyventojų skaičius padidėjo maždaug 9%. Taigi *gyventojų prieaugis* sudaro 9% nuo tų 4,4 milijardo, t. y.

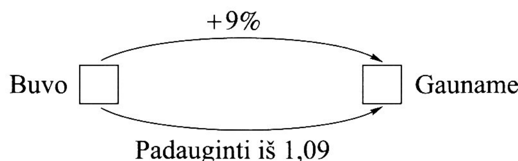
$$0{,}09 \cdot 4{,}4 \text{ milijardo} = 0{,}396 \text{ milijardo} \approx 0{,}4 \text{ milijardo}.$$

Todėl bendras gyventojų skaičius 1985 m. buvo

$$4{,}4 \text{ milijardo} + 0{,}4 \text{ milijardo} = 4{,}8 \text{ milijardo}.$$

Šį naują gyventojų skaičių (milijardais) galima apskaičiuoti ir šitaip:

$$(4{,}4 + 0{,}09 \cdot 4{,}4) = 4{,}4 \cdot (1 + 0{,}09) = 4{,}4 \cdot 1{,}09 \approx 4{,}8.$$



Taigi daugindami dydį iš skaičiaus $1+0{,}09 = 1{,}09$ (toliau jį vadinsime *koeficientu*), pridedame prie to dydžio jo 9%, t. y. *padidiname* jį 9%.

Pastaba. Šis nelabai vykęs pasakymas „prie dydžio pridedame jo 9%“ reiškia ne tai, kad prie dydžio pridedame 0,09, bet kad pridedame skaičių, gautą paėmus 9% to dydžio.

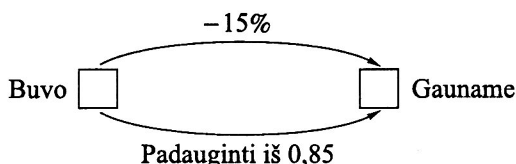
Jei prekės, kainuojančios 340 Lt, kaina sumažinama 15%, tai *nuolaida* sudaro:

$$15\% \text{ nuo } 340 \text{ Lt yra } 0{,}15 \cdot 340 \text{ Lt} = 51 \text{ Lt}.$$

Todėl sumažinta prekės kaina bus 340 Lt − 51 Lt = 289 Lt.

Šią naująją kainą galima apskaičiuoti ir šitaip:

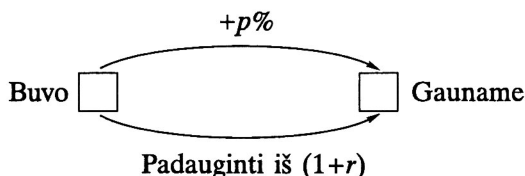
$$(340 - 0{,}15 \cdot 340) = 340 \cdot (1 - 0{,}15) = 340 \cdot 0{,}85 = 289 \text{ (Lt)}.$$



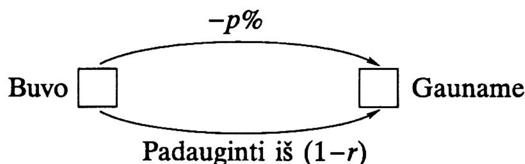
Taigi daugindami dydį iš koeficiento $(1 - 0{,}15) = 0{,}85$, iš to dydžio atimame jo 15%, t. y. *sumažiname* jį 15%.

Šiuos du pateiktus pavyzdžius galima apibendrinti dviem labai svarbiomis taisyklėmis:

Jei norime prie dydžio pridėti jo p%, padauginame jį iš koeficiento $1 + r$.

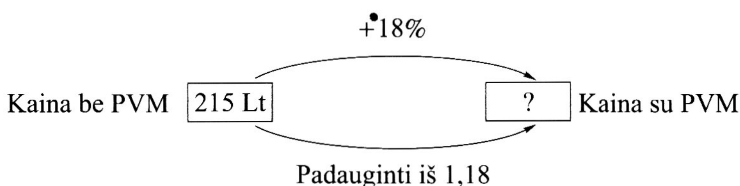


Jei norime iš dydžio atimti jo p%, padauginame jį iš koeficiento $1 - r$.



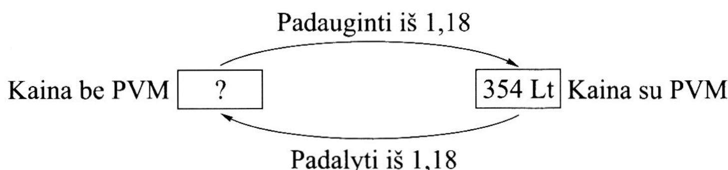
Abiem atvejais r atitinka $p\%$, t. y. $r = \frac{p}{100}$.

Pavyzdys
Kai perkame prekę, turime dar sumokėti 18% pridėtinės vertės mokestį (PVM) valstybei. Be PVM prekė kainuoja 215 Lt. Kiek kainuoja prekė su PVM?



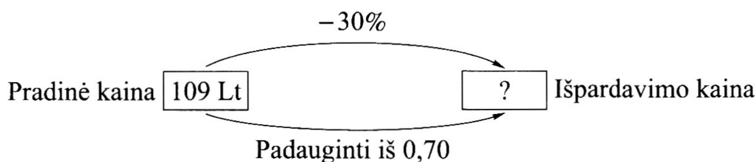
Sprendimas. Kainą su PVM gausime padauginę kainą be PVM iš koeficiento $1 + 0,18 = 1,18$, t. y. ji bus $215 \text{ Lt} \cdot 1,18 = 253,7$ Lt.

Pavyzdys
Prekė su PVM kainuoja 354 Lt. Kokia buvo prekės kaina be PVM?



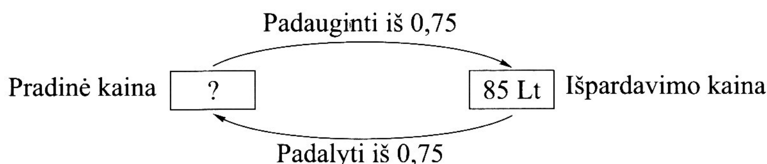
Sprendimas. Kaina be PVM gaunama padalijus kainą su PVM iš koeficiento 1,18, taigi kaina be PVM yra $354 \text{ Lt} : 1,18 = 300$ Lt.

Pavyzdys
Prekės, kainavusios po 109 Lt, dabar išparduodamos su 30% nuolaida. Kokia jų išpardavimo kaina?



Sprendimas. Išpardavimo kainą gausime padauginę pradinę kainą iš koeficiento $1 - 0,3 = 0,7$, taigi ji bus $109 \text{ Lt} \cdot 0,7 = 76,30$ Lt.

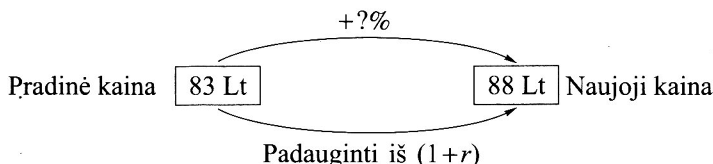
Pavyzdys
Žinoma, kad išparduodamos prekės yra nukainotos 25%. Dabar jos parduodamos po 85 Lt. Kokia jų pradinė kaina?



Sprendimas. Pradinę kainą gausime, padalijlę išpardavimo kainą iš koeficiento $1 - 0{,}25 = 0{,}75$, taigi ji bus 85 Lt : $0{,}75 \approx 113{,}33$ Lt.

Pastaba. Kaip matyti iš šių pavyzdžių, jau prieš tai suformuluotas taisykles galima sujungti į vieną, nepamirštant, jog skaičius r gali būti teigiamas arba neigiamas. Tuomet abiem atvejais koeficientas yra $(1 \mp r)$.

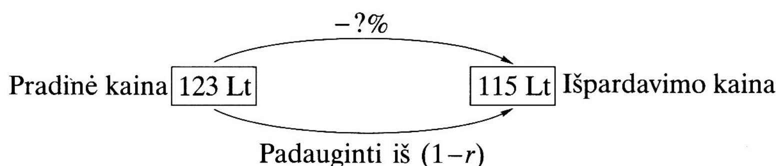
Pavyzdys
Prekės kaina pakilo nuo 83 Lt iki 88 Lt. Kiek procentų padidėjo prekės kaina?



Sprendimas. Padidėjimą procentais p rasime naudodamiesi tuo, jog žinome, kad naujoji kaina gaunama padauginus pradinę iš koeficiento $(1 + r)$:

$$83 \cdot (1 + r) = 88, \ \ (1 + r) = \frac{88}{83} \approx 1{,}0602,$$
$$r \approx 0{,}0602, \ \ \text{t. y. } p \approx 6{,}02\%.$$

Pavyzdys
Prekės kaina nukrito nuo 123 Lt iki 115 Lt. Kiek procentų sumažėjo prekės kaina?



Sprendimas. Sumažėjimą procentais rasime naudodamiesi tuo, jog žinome, kad naujoji kaina gaunama padauginus pradinę iš koeficiento $(1-r)$:

$$123\cdot(1-r)=115,\ \ (1-r)=\frac{115}{123}\approx 0{,}935,$$
$$r=1-0{,}935;\ r=0{,}065,\ \text{t. y.}\ p\approx 6{,}5\%.$$

102

Pavojai skaičiuojant procentus

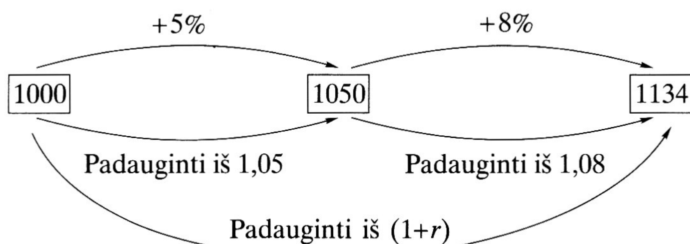
Skaičiuojant procentus, reikia būti atsargiems su kai kuriomis sąvokomis. Procentai visuomet esti procentai *nuo ko nors,* bet dažniausiai nėra aiškiai pasakoma nuo ko. O kai kalbama apie vienokius ir kitokius procentus, dažnai jie esti nuo *skirtingų* dydžių, ir dėl to atlikti veiksmus tiesiog su procentais būna gana keblu. Tačiau problemų sumažėja, jei skaičiuojame naudodamiesi ne procentais, o koeficientais.

Pavyzdys
Gyventojų skaičius per pirmuosius metus išaugo 5%, o per antruosius – 8%. Kiek procentų išaugo gyventojų skaičius iš viso?
Iš karto gal atsakytumėte, kad $5\%+8\%=13\%$, bet tai būtų neteisinga, nes 5% imama nuo pradinio gyventojų skaičiaus, o 8% – jau nuo gyventojų skaičiaus po metų, t. y. nuo kito gyventojų skaičiaus. Todėl šių procentų skaičių negalima taip be niekur nieko sudėti, nes jie yra skirtingų skaičių dalys.
Teisingą atsakymą gausime atsižvelgę į procentų procentus: per pirmuosius metus pradinis gyventojų skaičius išauga 5%, o per antruosius tiek pradinis gyventojų skaičius, tiek ir tas jų prieaugis padidėja 8%,

todėl reikia nepamiršti paimti ir 8% nuo prieaugio. Pradinį gyventojų skaičių paėmus 100, tas prieaugis bus 5, o tada bendras prieaugis:

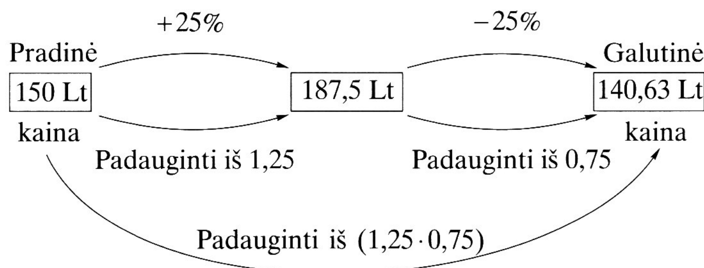
$$5 + (8\% \text{ nuo } 100) + (8\% \text{ nuo } 5) = 5 + 8 + 0{,}08 \cdot 5 =$$
$$= 5 + 8 + 0{,}4 = 13{,}4.$$

Taigi gyventojų skaičius išauga 13,4%. Pirmasis atsakymas 13% nuo teisingojo atsakymo 13,4% ir skiriasi būtent tais procentų procentais. O dabar parodysime, kaip lengva gauti atsakymą naudojantis koeficientais. Kadangi pradinio gyventojų skaičiaus nežinome, tai kad būtų paprasčiau, paimsime jį 1000:



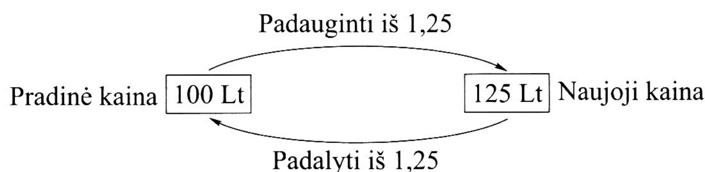
Pirmiausia gyventojų skaičius dauginamas iš 1,05, po to iš 1,08, todėl bendras koeficientas yra $(1 + r) = 1{,}05 \cdot 1{,}08 = 1{,}134$, tai ir atitinka 13,4% padidėjimą.
Atkreipkite dėmesį į tai, kad šis rezultatas nepriklauso nuo pradinio gyventojų skaičiaus. Jį pasirinkome lygiu tūkstančiui tik tam, kad galėtume operuoti konkrečiais parankiais skaičiais.

Pavyzdys
a) Prekės, kainavusios 150 Lt, kaina iš pradžių pakilo 25%, po to nukrito 25%. Kokia jos galutinė kaina?
Iš karto gali pasirodyti, kad prekė vėl kainuos 150 Lt, tačiau tai nėra teisinga, kadangi 25% padidėjimas imamas nuo pradinės kainos, o sumažėjimas – jau nuo naujosios, padidėjusios kainos. Kadangi padidėjimas ir sumažėjimas imami nuo skirtingų kainų, tai jų negalime taip be niekur nieko sulyginti. Užtat kai skaičiuojame naudodamiesi koeficientais, gauname:



Taigi galutinė kaina 140,63 Lt, ir čia aišku, jog 25% sumažėjimas nusveria 25% padidėjimą. Taip yra vėlgi dėl tų procentų procentų – sumažėjimas čia imamas nuo didesnės sumos.

b) Prekės kaina išaugo 25%. Kiek procentų ji turi nukristi, kad prekė kainuotų tiek pat?
Iš pirmo žvilgsnio atrodytų, kad kaina turės nukristi irgi 25%, bet tai būtų neteisinga. Šią problemą spręskime kitaip – pasinaudokime koeficientais. Kadangi prekės kainos nežinome, paprastumo dėlei ją pasirinkime lygią 100 Lt. Kad iš pradinės kainos gautume naująją, dauginame ją iš koeficiento 1,25.



Todėl norėdami nuo naujosios kainos vėl grįžti prie pradinės, turime ją padalyti iš 1,25. O dalyti iš 1,25 – tas pat kaip dauginti iš skaičiaus

$$\frac{1}{1{,}25} = 0{,}80 = 1 - 0{,}20.$$

Taigi prekės kaina turi sumažėti 20%.

Pavyzdys

Sąskaitos su kintamosiomis palūkanomis indėlis pirmaisiais metais padidėjo 10%, antraisiais – 17%, o trečiaisiais – 30%. Kokia buvo per šį laikotarpį vidutinė metinių palūkanų norma?
Jei imtume paprasčiausiai šių trejų palūkanų normų aritmetinį vidurkį:

$$\frac{10\% + 17\% + 30\%}{3} = 19\%,$$

tai būtų neteisinga, nes šios trejos palūkanos turi būti skaičiuojamos nuo skirtingų sumų.
Eisime kitu keliu – uždavinį spręsime naudodamiesi atskirais koeficientais. Bendras koeficientas bus:

$$1{,}10 \cdot 1{,}17 \cdot 1{,}30 = 1{,}6731.$$

Jeigu palūkanų normos kiekvienais metais būtų buvusios vienodos (vidutinės), tai gautume tokį bendrą koeficientą:

$$(1+r) \cdot (1+r) \cdot (1+r) = (1+r)^3.$$

Todėl būtų teisinga lygybė $(1+r)^3 = 1{,}6731$. Norint rasti r, reikia apskaičiuoti iš pradžių kubo pagrindą $(1+r)$. Tai atliekame ištraukdami šaknį:

$$1 + r = \sqrt[3]{1{,}6731} \approx 1{,}18715\ldots,$$

tad vidutinės palūkanos apytiksliai bus 18,7%. Iš šio pavyzdžio aišku, jog *norint rasti vidutines palūkanas, reikia traukti atitinkamo laipsnio šaknį iš atskirų koeficientų sandaugos.*

103 104 105

1.3. Sudėtinių palūkanų formulė

Paprastai banko indėlio palūkanos kaskart priskaičiuojamos per tam tikrą laikotarpį. Jis vadinamas laiko tarpsniu arba *terminu*. Jei palūkanos yra, tarkim, 1,25% per mėnesį, tai per terminą (čia – per mėnesį) kapitalas išauga 1,25%.

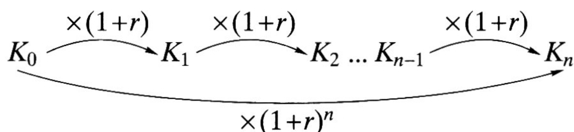
Pavyzdys
Lina padeda į banką 500 Lt. Palūkanų norma yra 6% per metus.

Suma po 1 metų: $500{,}00 \cdot (1 + 0{,}06) = 500{,}00 \cdot 1{,}06 = 530{,}00$
Suma po 2 metų: $530{,}00 \cdot (1 + 0{,}06) = 500{,}00 \cdot 1{,}06^2 = 561{,}80$
Suma po 3 metų: $561{,}80 \cdot (1 + 0{,}06) = 500{,}00 \cdot 1{,}06^3 = 595{,}51$
.
.
.
Suma po n metų: $= 500{,}00 \cdot 1{,}06^n$ (Lt).

Pavyzdys
Jonas neapibrėžtam laikui pasiskolina iš savo mamos 450 Lt. Jie sutaria 2% palūkanų per mėnesį.

Po 1 mėnesio Jonas bus skolingas: $450{,}00 \cdot (1+0{,}02) = 450{,}00 \cdot 1{,}02 = 459{,}00$
Po 2 mėnesių Jonas bus skolingas: $459{,}00 \cdot (1+0{,}02) = 450{,}00 \cdot 1{,}02^2 = 468{,}18$
.
.
.
Po 12 mėnesių Jonas bus skolingas: $= 450{,}00 \cdot 1{,}02^{12} = 570{,}71$
.
.
.
Po n mėnesių Jonas bus skolingas: $= 450{,}00 \cdot 1{,}02^n$ (Lt).

Iš šių pavyzdžių akivaizdi ***sudėtinių palūkanų formulės*** schema:



Pradinis kapitalas K_0, padėtas su $p\%$ laiko tarpsnio palūkanomis, per n laiko tarpsnių išauga iki sumos K_n, išreiškiamos formule

$$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n.$$

Skaičius K_n vadinamas kapitalu po n laiko tarpsnių (t. y. n kartų priskaičiavus palūkanas).

Skaičius r arba $p\%$ vadinamas palūkanų norma.

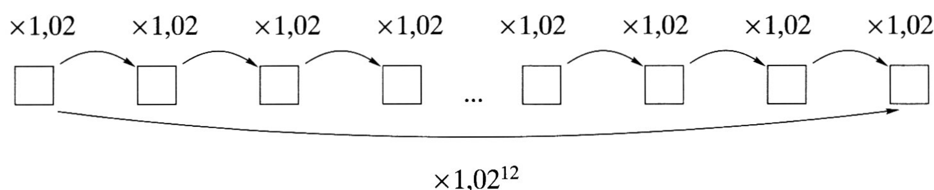
Pirmajame pavyzdyje pradinis kapitalas buvo $K_0 = 500$ Lt, laiko tarpsnio trukmė – 1 metai, o palūkanų norma – 6%, t. y. 0,06.

Antrajame pavyzdyje pradinė skola buvo $K_0 = 450$ Lt, laiko tarpsnio trukmė – 1 mėnuo, o palūkanų norma – 2%, t. y. 0,02.

Panagrinėkime dar kelis pavyzdžius.

Pavyzdys

Mėnesinių 2% palūkanų norma neatitinka 24% metinių palūkanų normos (prisiminkime procentų procentus).



Sudėtinių palūkanų metinis koeficientas yra $1{,}02^{12} \approx 1{,}2682$, ir tai atitinka 26,82% metinių palūkanų.

Pavyzdys

Kokia mėnesinių palūkanų norma atitinka 18% metines palūkanas?

Sprendimas. Kadangi metinis koeficientas yra 1,18, tai mėnesinis koeficientas $(1 + r)$ toks:

$$(1+r)^{12} = 1{,}18, \qquad 1 + r = \sqrt[12]{1{,}18} \approx 1{,}0139.$$

Taigi mėnesinių palūkanų norma apytiksliai yra 1,39%.

Pastaba. Pritaikę sudėtinių palūkanų formulę, nesunkiai galime priskaičiuoti tam tikro skaičiaus laiko tarpsnių palūkanas ar atvirkščiai – rasti, koks buvo pradinis kapitalas; traukdami šaknį, galime apskaičiuoti palūkanų normą. Tačiau be logaritmų sunkoka rasti laiko tarpsnių skaičių. Tai pamėginsime padaryti bandymų ir klaidų metodu.

Pavyzdys

Gimus Mykolui jo tėvas padėjo į banką 10 000 Lt su 6% metinėmis palūkanomis. Kiek metų reikia sulaukti Mykolui, kad jo sąskaitoje būtų 25 000 Lt?

Sprendimas. Pagal sudėtinių palūkanų formulę

$$10\,000 \cdot 1{,}06^n = 25\,000, \qquad 1{,}06^n = 2{,}5.$$

Taigi mums reikia rasti tokį Mykolo amžių n, kad $1{,}06^n$ būtų ne mažiau kaip 2,5. Apskaičiavę skaičiuokliu, gauname:

$1{,}06^{10} \approx 1{,}79$	$1{,}06^{20} \approx 3{,}21$	$1{,}06^{15} \approx 2{,}40$	$1{,}06^{16} \approx 2{,}54$

Taigi Mykolas turės sulaukti bent 16 metų.

1.4. Taupymas ir paskolos

Taupymas

Padėjus sumą K_0 į banką, kur laiko tarpsnio palūkanų norma yra r, ta suma, kaip matėme, po n laiko tarpsnių išauga iki $K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$. Dažnai dedamas ne tik duodantis palūkanas vienkartinis indėlis K_0, bet ir atidaroma taupomoji sąskaita, kuri po kiekvieno laiko tarpsnio papildoma vis tokia pat suma K_0.

Pavyzdys

Į taupomąją sąskaitą sausio 1, balandžio 1, liepos 1 ir spalio 1 priskaičiuojama po 2% palūkanų (t. y. laiko tarpsnis čia – ketvirtis). Kiekvieną iš šių dienų Andrius padeda į sąskaitą po 500 Lt. Kokia suma bus jo sąskaitoje po 1 metų?

Pirmasis įnašas yra 1998 sausio 1 d., ir nuo šio įnašo palūkanos bus priskaičiuotos 4 kartus. Paskutinį kartą įmokama 1999 sausio 1 d., ir nuo šio įnašo palūkanų nebus priskaičiuota. Taigi iš viso įmokama 5 kartus, o skaičiavimai būtų tokie:

Nuo 1998 01 01 iki 1999 01 01	500 Lt išauga iki $500\,\text{Lt}\cdot 1{,}02^4$	$\approx$	541,22 Lt
Nuo 1998 04 01 iki 1999 01 01	500 Lt išauga iki $500\,\text{Lt}\cdot 1{,}02^3$	$\approx$	530,60 Lt
Nuo 1998 07 01 iki 1999 01 01	500 Lt išauga iki $500\,\text{Lt}\cdot 1{,}02^2$	$=$	520,20 Lt
Nuo 1998 10 01 iki 1999 01 01	500 Lt išauga iki $500\,\text{Lt}\cdot 1{,}02$	$=$	510,00 Lt
1999 sausio 1 d. įnešama 500 Lt.		$=$	500,00 Lt
Po penktojo įnašo sąskaitoje bus:		$\approx$	2602,02 Lt

Kaip matyti iš šio pavyzdžio, atlikti tokius taupomosios sąskaitos skaičiavimus yra nemažas vargas. Praktiškai naudojamos formulės, lentelės, skaičiavimai atliekami kompiuteriais.

Toks taupymas, kai kiekvieną laiko tarpsnį įnešama pastovi suma, vadinamas *tolygiu (reguliariu) taupymu*. Tolygiam taupymui yra išvesta formulė (2 skyriaus 8 skirsnyje nurodysime, kaip pagrįsti tokią formulę).

Tolygaus taupymo formulė

Kiekvieną laiko tarpsnį į banko sąskaitą su palūkanų norma r įnešant sumą b, po n-ojo įnašo sąskaitos suma A_n bus

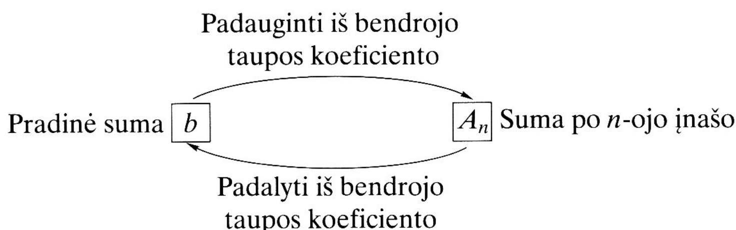
$$A_n = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = b \cdot q(n).$$

Skaičius $q(n) = \frac{(1+r)^n-1}{r}$ vadinamas *bendruoju taupos koeficientu.*

Pavyzdys
Ankstesniame pavyzdyje suma po penktojo įnašo buvo

$$A_5 = 500 \cdot \frac{1{,}02^5 - 1}{0{,}02} \approx 500 \cdot 5{,}204035 \approx 2602{,}02 \text{ (Lt)}.$$

Tolygaus taupymo saskaitos sumą A_n randame padauginę pastovaus įnašo sumą b iš bendrojo taupos koeficiento $q(n)$. Ir atvirkščiai, pastovaus įnašo sumą b galima rasti padalijus sąskaitos sumą A_n iš bendrojo taupos koeficiento:



109 110

Tolygaus išsimokėjimo paskola

Grąžinant finansinei įstaigai paskolą ar pirkus ką nors išsimokėtinai, reikia mokėti *palūkanas* nuo paskolos likučio ir paskolos grąžinimo *atskaitymo* sumas. Bendra suma, t. y. palūkanos + paskolos grąžinimo suma, vadinama *įmoka* (anuitetu). Grąžinant *tolygaus išsimokėjimo paskolą*, įmokos per visą atskaitymo laiką yra *tos pačios*. Pasiskolintoji suma vadinama *pradine skola*. Laikas, per kurį skola bus grąžinta, vadinamas *grąžinimo laiku*.

Pratimas

Simona pasiskolino 10 000 Lt su 6% pusmetinėmis palūkanomis padėvėtam automobiliui pirkti. Paskola turės būti grąžinama pastoviomis 2000 Lt įmokomis kas pusmetį. Praėjus pusmečiui mokamos:

$$\text{palūkanos} = 10\,000 \text{ Lt} \cdot 0{,}06 = 600 \text{ Lt}.$$

Kas lieka nuo tų 2000 Lt, t. y. 1400 Lt, atskaitoma nuo skolos, kuri tuo būdu sumažėja iki 8600 Lt. Ir taip vyksta, kol grąžinama visa suma.

	A	B	C	D	E	F
1	Tolygaus išsimokėjimo paskola	Pradinė skola (Lt)	Palūkanų norma	Įmoka (anuitetas) (Lt)		
2		10 000	0,06	2000		
3	Laiko tarpsnis (pusmečiai)	Skola	Palūkanos	Įmoka (anuitetas)	Paskolos grąžinimo suma	Skolos likutis
4	1	10 000	600	2000	1400	8600
5	2	8600		2000		
6	3			2000		
7	4			2000		
8	5			2000		
9	6			2000		
10	7			2000	234	0

Užpildykite lentelę, kad su paskutine įmoka skola išnyktų.

Atkreipkite dėmesį į tai, jog ilgainiui skolai mažėjant, mažėja palūkanos ir didėja paskolos grąžinimo suma. Tai turi reikšmę mokesčių požiūriu – įmoka lieka pastovi, bet neapmokestinamų palūkanų suma mažėja, taigi vien dėl šios priežasties įdomu pasekti, kaip ta palūkanų suma kinta.

Šiame pratime patyrinėjome, kaip esant tai pačiai įmokai ir kintamosioms palūkanoms, grąžinama tolygaus išsimokėjimo paskola. Dažnai klausimas keliamas šitaip.

Kokio dydžio paskolą aš galiu paimti, jeigu įstengčiau n laiko tarpsnių mokėti y dydžio įmokas? Tolygaus išsimokėjimo paskoloms yra išvesta formulė, kuri gali į šį klausimą atsakyti (2 skyriaus 8 skirsnyje nurodyta, kaip pagrįsti tokią formulę).

Tolygaus išsimokėjimo paskolos su palūkanų norma r ir pastovia įmoka y, grąžinamos per n laiko tarpsnių, pradinė skola yra

$$G = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = y \cdot d(n).$$

Skaičius $d(n) = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$ vadinamas *skolos koeficientu.*

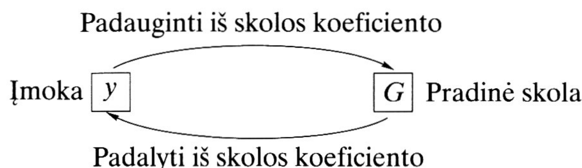
Pavyzdys

Jeigu Simona yra pasirengusi mokėti septynis laiko tarpsnius 2000 Lt įmokas, esant 6% palūkanoms, tai iš skolos ji gali grąžinti tokią sumą:

$$G = 2000 \cdot \frac{1-1{,}06^{-7}}{0{,}06} = 2000 \cdot 5{,}5824 = 11\,164{,}80 \text{ (Lt)}.$$

Taigi tolygaus išsimokėjimo paskolos pradinę skolą G rasime padauginę įmoką y iš skolos koeficiento $d(n)$.

Ir atvirkščiai, įmokos dydį y galima rasti pradinę skolą G padalijus iš skolos koeficiento.



Išmokų paskola

Kita dažnai naudojama paskolos forma – *išmokų paskola*. Esmė čia ta, kad *paskolos grąžinimo suma yra pastovi*, o priskaičiuojamos palūkanos su mažėjančia skola mažėja. Tokiu būdu įmoka čia nėra pastovi, o kas laiko tarpsnį mažėjanti.

Pratimas

Jeigu Kotryna pasiskolina 5000 Lt su 8% palūkanomis stereoaparatūrai pirkti ir pasirengusi kas laiko tarpsnį iš skolos grąžinti po 1000 Lt, tai galime sudaryti tokią lentelę:

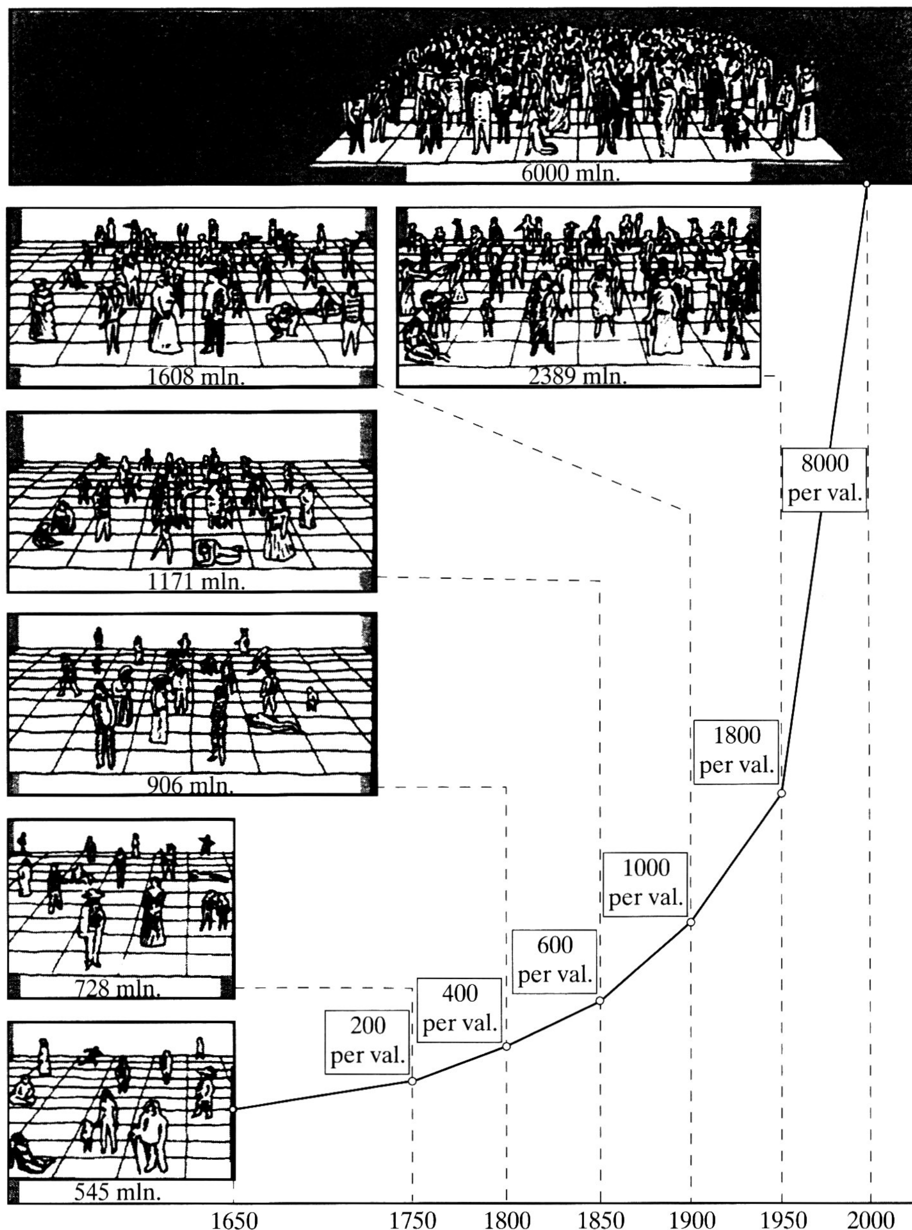
	A	B	C	D
1	Palūkanų norma	Grąžinimo suma (Lt)	Pradinė skola (Lt)	
2	0,08	1000	5000	
3	Skolos likutis	Palūkanos	Grąžinimo suma	Įmoka (anuitetas)
4	5000	400	1000	1400
5			1000	
6			1000	
7			1000	
8			1000	

Naudodamiesi skaičiuokliu, baikite pildyti lentelę. Remkitės šiais sąryšiais:
Palūkanos = palūkanų norma × skolos likutis;
Įmoka = palūkanos + grąžinimo suma;
Naujoji skola = sena likusioji skola – grąžinimo suma.

111 112 113 114 115 116

2. Augimas

GYVENTOJŲ SKAIČIUS ŽEMĖJE



Apie ką pagalvojate išgirdę žodį augimas (ekonominis augimas, gyventojų skaičiaus prieaugis, energijos gamyba, „augimo riba"...)?

Trumpai pasižymėkite pagrindines mintis. Papasakokite vienas kitam, ką užsirašėte.

2.1. Augimo modeliai

Kintančiam pasauliui aprašyti yra sudaryta įvairiausių dydžių kitimo modelių. Iš įvairių modelių, aprašančių didėjimą, ypač plačiai paplitę du: *tiesinio* ir *eksponentinio* (*rodiklinio*) *augimo modeliai.* Būtent šiuos du modelius ir išsamiau panagrinėsime šiame skyriuje.

Kaip aptarėme I dalies 3-iame skyriuje, sąryšį tarp dviejų dydžių x ir y galima aprašyti įvairiais būdais:

1) *tekstu*, nusakančiu sąryšį *žodžiais*;
2) *lentele*, rodančia sąryšį *skaičiais*;
3) *grafiku*, vaizduojančiu sąryšį *geometriškai*;
4) *lygtimi*, išreiškiančia sąryšį *simboliais.*

Tikslieji mokslai daugiausia vartoja 2), 3) ir 4) aprašymo būdus, pagrįstus mokslininkų sukurta matematikos kalba. Aišku, visuose šiuose aprašymuose glūdi iš esmės ta pati informacija apie sąryšį tarp dviejų dydžių x ir y; bet kuris iš šių aprašymų gali būti panaudotas tam tikrą modelį atitinkantiems uždaviniams spręsti, tačiau kiekvienas jų turi savo privalumų ir trūkumų, todėl įvairiose situacijose bus pasirenkamas tai vienas, tai kitas būdas.

Toliau pateikdami tiesinio ir eksponentinio augimo modelius, jų būdingiausius bruožus stengsimės atskleisti šiais trimis aprašymo būdais.

2.2. Tiesinis augimas (suminis augimas)

Jei dydžiui būdingas *pastovus prieaugis* per tam tikrą laiką, tai sakome, kad tas dydis *tiesiškai* auga.



Kas mėnesį pasidedant į „kojinę" po vienodą sumą, sukauptas kapitalas kiekvieną mėnesį padidės ta pačia suma – santaupos augs tiesiškai.

Pavyzdys

Sakykime, tam tikro dydžio *pradinė reikšmė* yra 5 ir per laiko vienetą jis padidėja *pastoviu prieaugiu* $+2$.

Iš pradžių (t. y. kai $x = 0$) y reikšmė yra 5 (pradinė reikšmė). Toliau kas kiekvieną laiko vienetą vis pridedame 2:

po 1 laiko vieneto y reikšmė išauga iki $5 + 2 = 7$

po 2 laiko vienetų y reikšmė išauga iki $7 + 2 = 9$

po 3 laiko vienetų y reikšmė išauga iki $9 + 2 = 11$

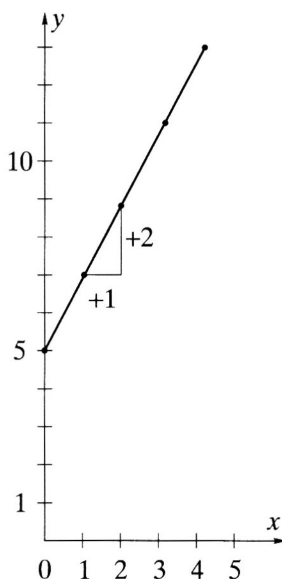
ir t. t.

Taigi gauname tokią lentelę:

x (laikas)	0	1	2	3	4	5	...
y	5	7	9	11	13	15	...

Kadangi toks augimas vyksta kąskart pridedant tą patį skaičių, jis dar vadinamas *suminiu augimu.*

Atidėję taškus $(x; y)$ stačiakampėje koordinačių sistemoje, matome, jog jie išsidėstę *vienoje tiesėje.*



Tiesinio augimo modelio grafikas stačiakampėje koordinačių sistemoje yra tiesė.

Vėliau pamatysime, jog yra ir kitokių koordinačių sistemų – ne vien tik stačiakampės!

Lentelėje taip pat matyti, jog x padidėjus 1, y visada padidėja pastoviu prieaugiu 2. Tas pastovus prieaugis per laiko vienetą reiškia tiesės *krypties koeficientą*. Be to, tiesė kerta y ašį taške 5 (pradinės reikšmės taške).

Panagrinėję lentelę, galime sudaryti ir tiesinio augimo lygtį. Užpildysime tiesinio augimo, kurio *pradinė reikšmė* b, o *pastovus prieaugis* per laiko vienetą – a, lentelę:

po 1 laiko vieneto y reikšmė išauga iki $b + a$
po 2 laiko vienetų y reikšmė išauga iki $(b + a) + a = b + 2 \cdot a$
po 3 laiko vienetų y reikšmė išauga iki $(b + 2 \cdot a) + a = b + 3 \cdot a$
ir t. t.

x (laikas)	0	1	2	3	4	5	...
y	b	$b + a$	$b + 2a$	$b + 3a$	$b + 4a$	$b + 5a$	...

Šioje lentelėje matyti, jog y reikšmė gaunama padauginus x reikšmę iš a ir pridėjus b. Tai galima užrašyti tokia lygtimi:

$$y = b + a \cdot x = a \cdot x + b.$$

O tai ir yra tiesės su krypties koeficientu a, kertančios y ašį taške b, lygtis.

Tiesinio augimo modelio pastovus prieaugis a (per laiko vienetą) reiškia modelio grafiko – tiesės – krypties koeficientą, o pradinė reikšmė b – tiesės sankirtos su y ašimi tašką.

Pavyzdys

Pateiktame pavyzdyje $b = 5$, o $a = 2$ (pastovus prieaugis per laiko vienetą), todėl tiesės lygtis yra tokia:

$$y = 2 \cdot x + 5.$$

Jei, pavyzdžiui, $x = 3$, atitinkama y reikšmė bus:

$$y = 2 \cdot 3 + 5 = 6 + 5 = 11.$$

201 202 203

Kaip matėme, bet koks tiesinis augimas yra visiškai apibrėžiamas *dviem dydžiais*: jo *pradine reikšme* b ir *pastoviu prieaugiu* a. Praktiškai vis dėlto neretai pasirenkamos ne a ir b reikšmės, o kiti du duomenys – *du grafiko taškai* arba *dvi lentelės skiltys.* Kaip tuomet sudaryti lygtį, parodysime skaitiniu pavyzdžiu.

Pavyzdys

Sakykime, kad minėtieji du taškai yra (3; 6) ir (7; 26). Tuomet bus žinomos dvi poros lentelėje: $(x_1; y_1) = (3; 6)$ ir $(x_2; y_2) = (7; 26)$:

x (laikas)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
y				6				26		...

Nuo pirmojo prie antrojo taško ateiname 4 žingsniais išilgai x ašies, prie dydžių y 4 kartus pridėję po a. Vadinasi, skaičius y padidėja dydžiu $4 \cdot a$. Kita vertus, iš lentelės matyti, jog y reikšmė išaugo nuo 6 iki 26, todėl

$$6 + 4 \cdot a = 26 \Longleftrightarrow 4 \cdot a = 26 - 6 = 20 \Longleftrightarrow a = \frac{20}{4} = 5.$$

Taigi *krypties koeficientas* šiuo atveju yra 5.
Teisingas toks sąryšis:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x \text{ prieaugis}}.$$

Atkreipkite dėmesį, jog mūsų gautoji formulė visiškai sutampa su gerai žinoma tiesės krypties koeficiento formule:

$$\text{krypties koeficientas } a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y \text{ prieaugis}}{x \text{ prieaugis}}.$$

Kadangi jau žinome krypties koeficientą $a = 5$, nesunku rasti *pradinę reikšmę* b – tereikia nuo taško $x = 3$ žingsniuoti atgal, kol pasieksime tašką $x = 0$, ties kiekvienu žingsniu iš y reikšmės atimant 5:

x (laikas)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
y	−9	−4	1	6				26		...

Taigi pradinė reikšmė b yra $b = 6 - 5 \cdot 3 = -9$,
ir ji atitinka formulę $b = y_1 - a \cdot x_1$,
todėl lygtis bus tokia: $y = 5 \cdot x - 9$.

Iš šio pavyzdžio aišku, jog a ir b galima rasti šitaip:

Jei $(x_1; y_1)$ *ir* $(x_2; y_2)$ *yra du tiesinio augimo lentelės taškai, tai pastovus prieaugis (krypties koeficientas)* a *yra:*

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1};$$

čia x *prieaugis* $(x_2 - x_1)$ *yra žingsnių skaičius lentelėje; pradinė reikšmė* $b = y_1 - a \cdot x_1$.

204 205 206

2.3. Eksponentinis augimas

Jei dydis per kiekvieną laiko vienetą padidėja tuo pačiu daugikliu, tai sakome, kad tas dydis auga eksponentiškai; tai taip pat reiškia, kad jis auga pastoviu procentų skaičiumi. Taigi jei kas nors didėja tam tikru procentų skaičiumi, kalbama apie eksponentinį augimą. Eksponentinio augimo modeliai yra labai paplitę – taip didėja ir santaupos banke, ir gyventojų skaičius. Beveik kiekviename laikraštyje rašoma, kad kas nors išaugo tam tikru procentų skaičiumi – „pirmuosius tris šių metų mėnesius kaina kilo po 0,3%“ ir t. t. Visais atvejais kalbama apie eksponentinį augimą. Būtent tokio pobūdžio augimą dabar ir panagrinėsime nuodugniau.

Pavyzdys
a) Į banko sąskaitą padedama 1000 Lt. Bankas moka 8% metinių palūkanų. Indėlis šiuo atveju kasmet padidėja *tiek pat*-procentų, t. y. tuo pačiu daugikliu, – taigi indėlis auga *eksponentiškai.*
b) Taupytojas kas mėnesį sukiša į kojinę 500 Lt. Jo santaupos kas mėnesį padidėja ta pačia suma (tiek pat litų), – taigi santaupos auga *tiesiškai.*
c) Vyriausybė nutarė kasmet po 1,5% mažinti valdymo išlaidas. Taigi jos mažės *eksponentiškai.*
d) Jeigu būtų nuspręsta valdymo išlaidas kasmet mažinti 5 mln. litų, jos mažėtų *tiesiškai.*

Pavyzdys

Sakykime, tam tikro dydžio pradinė reikšmė yra 5 ir kas apibrėžtą laiko vienetą jis padidėja pastoviu daugikliu 2.

Pradžioje (t. y. kai $x = 0$) y reikšmė yra 5 (pradinė reikšmė). Vėliau, kaskart praėjus laiko vienetui, ją padauginame iš 2:

po 1 laiko vieneto y reikšmė išauga iki $2 \cdot 5 = 10$

po 2 laiko vienetų y reikšmė išauga iki $2 \cdot 10 = 20$

po 3 laiko vienetų y reikšmė išauga iki $2 \cdot 20 = 40$

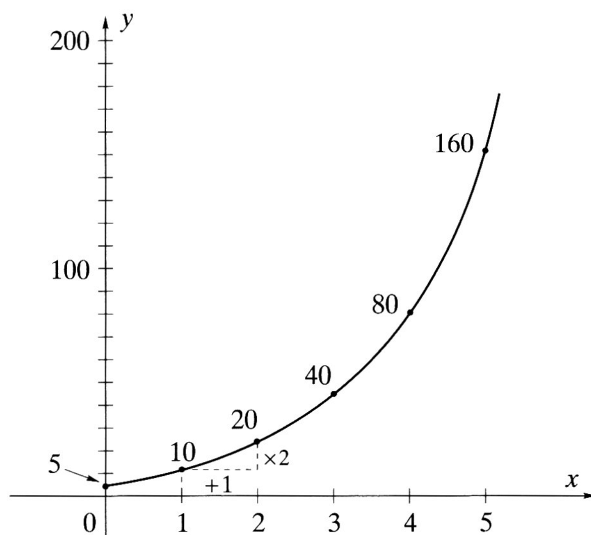
ir t. t.

Šitaip atrodo užpildyta lentelė:

x (laikas)	0	1	2	3	4	5	...
y	5	10	20	40	80	160	...

Kadangi šiuosyk dydis auga vis dauginant jį iš to paties skaičiaus, tai tokio pobūdžio augimas dar vadinamas *kartotiniu augimu.*

Atidėję taškus $(x; y)$ stačiakampėje koordinačių sistemoje, matome, jog šįkart jie *nėra* vienoje tiesėje.



Panagrinėję lentelę, galime sudaryti eksponentinio augimo *lygtį*. Užpildysime eksponentinio augimo lentelę, kai pradinė reikšmė yra b, o augimo per laiko vienetą daugiklis – skaičius a:

po 1 laiko vieneto y reikšmė išauga iki $b \cdot a$
po 2 laiko vienetų y reikšmė išauga iki $(b \cdot a) \cdot a = b \cdot a^2$
po 3 laiko vienetų y reikšmė išauga iki $(b \cdot a^2) \cdot a = b \cdot a^3$
ir t. t., kas žingsnis y reikšmę padauginus iš a:

x	0	1	2	3	4	5	...
y	b	$b \cdot a$	$b \cdot a^2$	$b \cdot a^3$	$b \cdot a^4$	$b \cdot a^5$	...

Iš lentelės matyti, jog y reikšmė gaunama pakėlus skaičių a laipsniu x ir padauginus iš b. Tai galima užrašyti lygtimi

$$y = b \cdot a^x.$$

Pavyzdys

Pateiktame pavyzdyje $b = 5$, o $a = 2$ (daugiklis laiko vienetui), todėl lygtis yra tokia:

$$y = 5 \cdot 2^x.$$

Paėmus, pavyzdžiui, $x = 3$, atitinkama y reikšmė bus tokia:

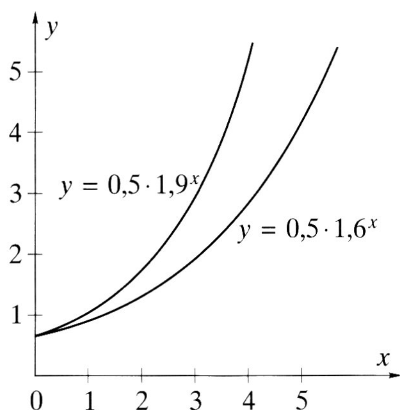
$$y = 5 \cdot 2^3 = 5 \cdot 8 = 40,$$

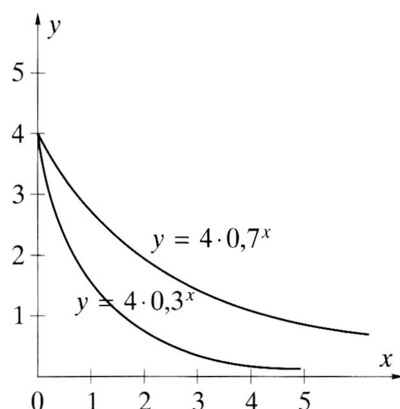
tai sutampa su reikšme iš lentelės.

207 208

Pavyzdys: Eksponentinio augimo funkcijų lentelės bei grafikai

x	0	1	2	3	4	5
$0{,}5 \cdot 1{,}6^x$	0,50	0,80	1,28	2,05	3,28	5,24
$0{,}5 \cdot 1{,}9^x$	0,50	0,95	1,81	3,43	6,52	12,38
$4 \cdot 0{,}3^x$	4,00	1,20	0,36	0,11	0,03	0,01
$4 \cdot 0{,}7^x$	4,00	2,80	1,96	1,37	0,96	0,67





Kaip matėme, eksponentinio augimo funkcijos grafikas, nubrėžtas stačiakampėje koordinačių sistemoje, nėra tiesė. Tačiau ir šiuo atveju grafikas kerta ordinačių ašį pradinės reikšmės taške b, t. y. taške $(0; b)$.

Jei funkcija yra didėjanti ($a > 1$), tai juo didesnis a, juo staigiau kreivė kyla.

Jei funkcija yra mažėjanti ($0 < a < 1$), tai juo mažesnis a, juo staigiau kreivė krinta.

Taigi daugiklis a nustato funkcijos augimo greitį. Jis dar vadinamas *eksponentinės funkcijos pagrindu.*

Kaip matome, eksponentinis augimas yra visiškai apibrėžiamas dviem dydžiais: *pradine reikšme b* ir *daugikliu a*. Vis dėlto praktiškai dažniausiai pasirenkamos ne a ir b reikšmės, o kiti du duomenys: *du grafiko taškai* arba *dvi lentelės skiltys.* Kaip tuomet galima sudaryti funkcijos lygtį, parodysime pavyzdžiu.

Pavyzdys

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
y				4			108			...

Sakykime, kad minėtieji du taškai yra (3; 4) ir (6; 108). Tuomet lentelėje bus dvi skiltys: $(x_1;\ y_1) = (3;\ 4)$ ir $(x_2;\ y_2) = (6;\ 108)$. Nuo pirmojo prie antrojo taško ateiname 3 žingsniais išilgai x ašies, y dydžius kaskart po triskart padauginę iš a. Taigi skaičius y padidėja a^3 kartų. Kita vertus, iš lentelės aišku, jog skaičius y padidėja nuo 4 iki 108, todėl

$$4 \cdot a^3 = 108 \iff a^3 = \frac{108}{4} = \frac{y_2}{y_1} \iff$$

$$\iff a = \sqrt[3]{\frac{108}{4}} = \sqrt[3]{27} = 3, \quad \text{t. y.} \quad \sqrt[x\ \text{prieaugis}]{\frac{y_2}{y_1}} = a.$$

Sužinojus pagrindą $a = 3$, nesunku rasti pradinę reikšmę b – tereikia žingsniuoti išilgai x ašies kairėn, kol pasieksime tašką $x = 0$, ties kiekvienu žingsniu padaliję y dydį iš 3:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
y	$\frac{4}{3^3}$	$\frac{4}{3^2}$	$\frac{4}{3}$	4	12	36	108	324	972	

Taigi pradinė reikšmė b yra $\quad b = \frac{4}{3^3} = \frac{4}{27}$,

ir ji atitinka formulę $\quad b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$,

todėl lygtis bus šitokia: $\quad y = \frac{4}{27} \cdot 3^x$.

Iš šio pavyzdžio aišku, jog a ir b galima rasti tokiu būdu:

Jei $(x_1; y_1)$ ir $(x_2; y_2)$ yra du eksponentinio augimo lentelės taškai, tai daugiklis a yra

$$a = \sqrt[v]{\frac{y_2}{y_1}};$$

čia $v = x_2 - x_1$ yra žingsnių lentelėje skaičius; pradinė reikšmė yra $b = y_1 : a^{x_1}$.

Palyginkime tiesinio ir eksponentinio augimo modelius:

	Lygtis	a	b (pradinė reikšmė)
Tiesinio augimo modelis	$y = b + \underbrace{(a + \cdots + a)}_{x \text{ kartų}} = b + a \cdot x$	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$y_1 - a \cdot x_1$
Eksponentinio augimo modelis	$y = b \cdot \underbrace{(a \cdots a)}_{x \text{ kartų}} = b \cdot a^x$	$\sqrt[v]{\frac{y_2}{y_1}}$ $v = x_2 - x_1$	$\frac{y_1}{a^{x_1}}$

Kaip iš pradžių buvo pastebėta, tarp *eksponentinio augimo* ir *palūkanų skaičiavimo* yra glaudus ryšys. Jei dydis auga pastoviu procentų

skaičiumi $p\%$, tai jis didėja daugikliu

$$a = 1 + r, \quad \text{kur} \quad r = \frac{p}{100}.$$

O *eksponentinio augimo* funkcijos lygtis $y = b \cdot a^x$ sudaryta panašiai kaip *palūkanų formulė* $K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$.

Pavyzdys
Buvo nustatyta, jog žuvų ežere per metus sumažėja 7%. Taigi žuvų skaičius ežere mažėja eksponentiškai.
Metinis prieaugis yra $r = \frac{-7}{100} = -0{,}07$, todėl daugiklis a lygus $a = 1 + r = 1 - 0{,}07 = 0{,}93$. Tarkime, tam tikru metu ežere buvo 1000 žuvų. Galime apskaičiuoti, kiek žuvų ežere bus vėliau:

po 1 metų bus $1000 \cdot 0{,}93 = 930$ žuvų,
po 10 metų bus $1000 \cdot 0{,}93^{10} = 484$ žuvys,
po 15,5 metų bus $1000 \cdot 0{,}93^{15{,}5} = 325$ žuvys.

Norint rasti augimo procentą r, naudojantis dviem žinomais taškais $(x_1; y_1)$ ir $(x_2; y_2)$, pirmiausia iš bendros formulės

$$\sqrt[v]{\frac{y_2}{y_1}} = a$$

apskaičiuojamas daugiklis a, o po to iš sąryšio $a = 1 + r \Leftrightarrow r = a - 1$ randamas procentų skaičius.

209 210 211 212 213 214 215

2.4. Dvigubėjimo ir puskiekio periodas

Eksponentinei funkcijai būdinga tai, jog kaskart lentelės x skiltyje pasislinkus į priekį tam tikra atkarpėle – *x prieaugiu*, *y* reikšmė padauginama iš tam tikro *daugiklio*:

x	0	1	2	3	4	...
y	6	9	13,5	20,25	30,375	...

Šis daugiklis, savaime suprantama, priklauso nuo x prieaugio dydžio.

Iš lentelės duomenų:

1 žingsnio daugiklis yra $a = 1{,}5$

2 žingsnių daugiklis yra $a^2 = 2{,}25$

3 žingsnių daugiklis yra $a^3 = 3{,}375$ ir t. t.

Eksponentinei funkcijai didėjant, šis daugiklis esti didesnis už 1. Jis yra tuo didesnis, kuo didesnį x prieaugį pasirenkame. Galima pasirinkti tokį x prieaugį, kad jo daugiklis būtų lygus 2, t. y. kad y reikšmė padvigubėtų. Šis ypatingas x prieaugis vadinamas *dvigubėjimo konstanta* X_2, arba jeigu kalbama apie laikotarpį – *dvigubėjimo periodu* T_2. Pateiktame pavyzdyje dvigubėjimo konstanta būtų truputį mažesnė už 2. Apskaičiavę skaičiuokliu, gausime:

$$1{,}5^{1{,}7} \approx 1{,}9923, \quad 1{,}5^{1{,}8} \approx 2{,}0747, \quad 1{,}5^{1{,}71} \approx 2{,}0004,$$

taigi dvigubėjimo konstanta yra $X_2 \approx 1{,}71$.

Mažėjanti eksponentinė funkcija apibūdinama *puskiekio konstanta* $X_{1/2}$ (arba *puskiekio periodu* $T_{1/2}$), t. y. x pokyčiu, atitinkančiu y reikšmės sumažėjimą perpus.

Žinant eksponentinės funkcijos dvigubėjimo ar puskiekio konstantą, nesunku sudaryti tos funkcijos lentelę. Joje ta konstanta imama x prieaugiu.

Pavyzdys

Jei 5000 Lt kapitalas kas ketveri metai padvigubėja, tai jis auga šitaip:

Laikas (metai)	0	4	8	12	...
Kapitalas (Lt)	5 000	10 000	20 000	40 000	...

Apskaičiuoti dvigubėjimo konstantą iš lygties $y = b \cdot a^x$ yra gana sudėtinga. Todėl praktiškai dvigubėjimo konstantą geriau nustatysime iš grafiko arba suskaičiuosime skaičiuokliu. Užtat, kaip pamatysime iš pateikto pavyzdžio, žinant dvigubėjimo konstantą X_2, yra visai paprasta apskaičiuoti daugiklį a.

Pavyzdys

Jei dvigubėjimo konstanta yra, tarkime, 5, tai kaskart padarius 5 žingsnius išilgai x ašies į dešinę, y reikšmė padvigubėja:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
y	20	23,0	26,4	30,3	34,8	40	45,9	52,8	60,6	69,6	80	...

Taigi bendras penkių žingsnių daugiklis yra 2, todėl

$$a^5 = 2 \iff a = \sqrt[5]{2} \approx 1{,}1487,$$

o tai atitinka $r = 14{,}87\%$ procentinį prieaugį.

Apibendrinimas

1) Jei eksponentiškai augančio dydžio dvigubėjimo konstanta yra X_2, tai daugiklį a galima rasti šitaip:

$$a = \sqrt[X_2]{2};$$

2) Jei eksponentiškai nykstančio dydžio puskiekio konstanta yra $X_{1/2}$, tai daugiklį a galima rasti šitaip:

$$a = \sqrt[X_{1/2}]{1/2}.$$

Eksponentinis augimas, palyginus su tiesiniu, atrodo tarsi *griūtis*. Tuo paprasčiausia įsitikinti patyrinėjus dvigubėjimo periodą. Per dvigubėjimo periodą dydis išauga 2 kartus. Per 10 dvigubėjimo periodų dydis išaugs $2^{10} = 1024$, t. y. daugiau nei 1000 kartų. Tęsdami toliau galime įsitikinti, jog eksponentiškai augantis dydis:

a) per 10 dvigubėjimo periodų padidėja apie tūkstantį kartų;
b) per 20 dvigubėjimo periodų padidėja apie milijoną kartų;
c) per 30 dvigubėjimo periodų padidėja apie milijardą kartų.

Dydžio dvigubėjimo periodas yra ypatingas laikotarpis, parodantis, kaip greitai tas dydis auga.

216 217 218

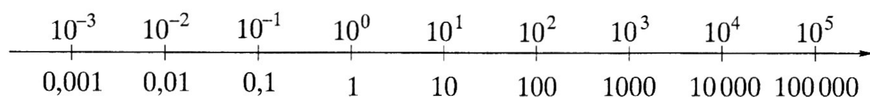
2.5. Eksponentinio augimo modelių grafikai

Kaip jau matėme 33 p., eksponentinio augimo modelių grafikai, nubrėžti įprastoje koordinačių sistemoje, nėra tiesės. Kadangi eksponentinės augimo funkcijos turi didelę taikomąją reikšmę, būtų labai praktiška koordinačių sistemą taip „ištempti“, kad eksponentinės funkcijos grafikas toje „ištemptoje“ koordinačių sistemoje būtų tiesė. Tuomet būtų akivaizdu, ar duotieji skaitiniai duomenys gali būti aprašyti eksponentinio

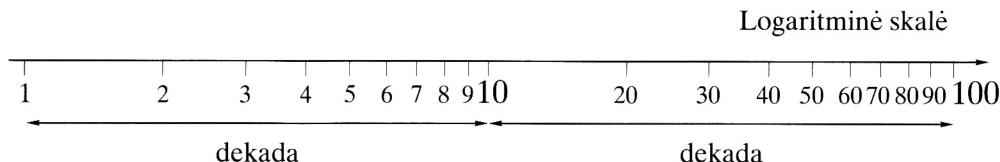
augimo modeliu; taip pat būtų lengva nustatyti susijusias x ir y reikšmes. Šio skirsnio tikslas ir yra supažindinti jus su tokia „ištempta“ koordinačių sistema – *pusiau logaritmine koordinačių sistema.*

Vadinamojo pusiau logaritminio popieriaus pavyzdys. Čia x ašis yra sudalyta kaip įprasta, o y ašis – logaritmiškai.

Logaritminėje skalėje visi 10 laipsnių atidedami vienodais tarpsniais:



Intervalai ..., 0,01–0,1, 0,1–1, 1–10, 10–100, ... vadinami *dekadomis.* Dekadą 10–100 sudaro skaičiai su 2 skaitmenimis prieš kablelį, dekadą 1–10 sudaro skaičiai su 1 skaitmeniu prieš kablelį ir t. t. Dekada 1–10 vadinama *pagrindine.* Skaičius 1 yra logaritminės skalės *pradžios taškas.*



Dviejų gretimų dekadų skaičiai skiriasi daugikliu 10: visus dekados skaičius padauginę iš 10, gauname tolesnės gretimos dekados skaičius. Kadangi logaritminė skalė yra tarsi ištempta, reikia šiek tiek pasipraktikuoti, norint išmokti teisingai joje nustatyti skaičius.

Pratimas

Atidėkite logaritminėje skalėje šiuos skaičius:

a) 2, 6, 18, 54, 162;

b) 480, 240, 120, 60, 30, 15;

c) 15, 22,5, 33,75, 50,625, 75,9375.

Pakomentuokite rezultatus.

Koordinačių sistema su įprastai sudalyta x ašimi ir logaritmine y ašimi vadinama *pusiau logaritmine koordinačių sistema.* Esti ir *logaritminių koordinačių sistemų,* kuriose logaritminės yra abi ašys. Atkreipkite dėmesį, kad logaritminė skalė nėra iš anksto užpildyta – nuspręsti, kuri dekada bus pagrindinė, t. y. kuri dekada prasidės skaičiumi 1, reikia patiems.

Pratimas

Nubraižykite pusiau logaritminėje koordinačių sistemoje šių keturių funkcijų (žr. lentelę 34 p.) grafikus:

a) $y = 0{,}5 \cdot 1{,}6^x$; b) $y = 0{,}5 \cdot 1{,}9^x$; c) $y = 4 \cdot 0{,}3^x$; d) $y = 4 \cdot 0{,}7^x$.

Iš šio pratimo akivaizdu, kad eksponentinės funkcijos grafikas pusiau logaritminėje koordinačių sistemoje yra tiesė.

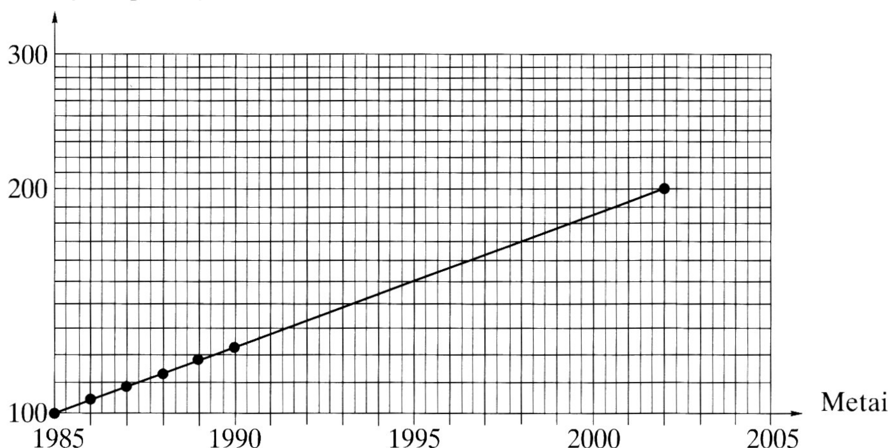
Funkcija, kurios grafikas pusiau logaritminėje koordinačių sistemoje – tiesė, yra eksponentinė funkcija:

$$y = b \cdot a^x.$$

Pavyzdys
Nuo 1985 sausio iki 1990 sausio vartojimo kainų indeksas* Danijoje kito, kaip parodyta šioje lentelėje:

Metai	1985	1986	1987	1988	1989	1990
Indeksas	100,0	103,6	107,8	112,7	118,1	121,2

Patyrinėsime, ar galima šį vartojimo kainų indekso kitimą aprašyti *eksponentine funkcija.* Tai darysime atidėję lentelės reikšmes pusiau logaritminėje koordinačių sistemoje. Matome, jog taškai išsidėstę apytiksliai vienoje tiesėje. Galima padaryti išvadą, kad vartojimo kainų indekso kitimą per nagrinėjamąjį laikotarpį galima pakankamai tiksliai aprašyti eksponentinio augimo modeliu. Kitaip sakant, šio periodo vartojimo kainų indeksas kito *eksponentiškai.*



Pavyzdžiui, iš grafiko matyti, jog jeigu vartojimo kainų indeksas ir toliau augs eksponentiškai, tai 2002 m. jis bus dvigubai didesnis nei 1985 m. Todėl dvigubėjimo periodas yra $T_2 = 17$; tai atitinka augimo daugiklį a, kurį rasime šitaip:

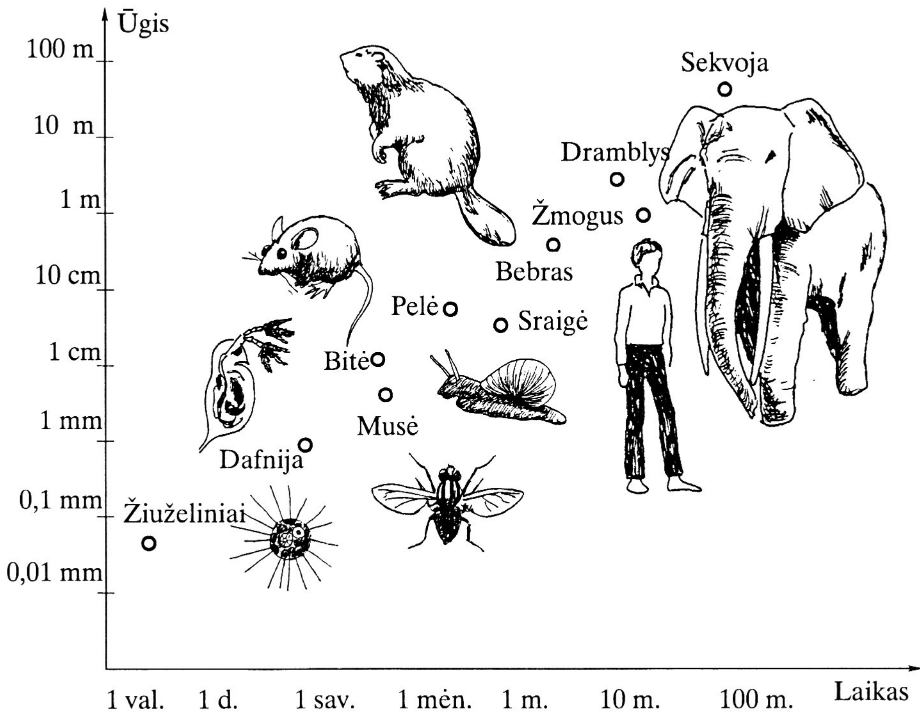
$$a^{17} = 2 \Longleftrightarrow a = \sqrt[17]{2} \approx 1{,}0416.$$

Taigi vidutinis prieaugis per metus yra apie 4,2%.

219 220 221

*Tai dydis, tam tikra prasme atspindintis vidutines kiekvieno žmogaus išlaidas.

Pastaba. Logaritminė koordinačių sistema naudojama ne tik eksponentinio augimo modeliams tirti. Ji naudojama ir tuomet, kai reikia grafiškai pavaizduoti plačiu diapazonu kintančius, daugelyje dekadų pasklidusius duomenis. Tokia problema iškyla, kai norime sudaryti individų vystymosi diagramą, t. y. pavaizduoti sąryšį tarp laiko, reikalingo individui užaugti ir jo ūgio užaugus. Tiek augimo trukmė, tiek ūgis yra pasklidę daugelyje dekadų: bakterijos išauga per porą valandų iki milimetro dalies, o sekvojos per 100 metų pasiekia 100 metrų aukštį. Aišku, kad tokius sąryšius tikslinga vaizduoti logaritminėje koordinačių sistemoje.



Sąryšis tarp ūgio ir augimo trukmės.

2.6. Ribojamas augimas

Jau išnagrinėjome du būdingus kitimo modelius – *tiesinio* ir *eksponentinio augimo.* Abiem atvejais augimas nebuvo *slopinamas.* Jei dydis auga tiesiškai ar eksponentiškai, jis didėja *neribotai*, todėl iš principo – jei tik pakankamai ilgai lauksime – gali pasidaryti kiek norima didelis.

Tačiau praktiškai toks neribotas augimas neatspindi realiame pasaulyje vykstančių reiškinių.

Net jeigu tiesinis augimas ir labai lėtas, jis negali tęstis be galo. Pavyzdžiui, per metus ant ežero ar jūros dugno iš upės nusėdančių sąnašų sluoksnis ilgą laiką tam tikru tikslumu auga tiesiškai. Tačiau tai negali trukti neribotą laiką – jau vien dėl to, kad jokia sąnašų krūva neišaugs aukščiau už tuos kalnus, iš kurių upė jas plukdo. Kitas pavyzdys – laisvasis kūnų kritimas. Čia greitis, kol galima nepaisyti oro pasipriešinimo, tolygiai didėja, bet galų gale oro pasipriešinimas pasidaro toks didelis, kad į jį jau būtina atsižvelgti. Greitis didėja vis lėčiau, kol galiausiai nusistovi ir daugiau nekinta.

Eksponentinis augimas panašus į sprogimą, todėl ribojimai jam turi dar didesnę reikšmę. Bet kokia populiacija, auganti eksponentiškai, bematant užtvindytų visą Žemės rutulį, todėl eksponentinis augimas negali trukti ilgą laiką (dvigubėjimo periodo atžvilgiu). Pirmajai triušių porai, patekusiai į Australiją, iš pradžių plisti nebuvo jokių ribojimų, ir triušių skaičius augo eksponentiškai. Bet kadangi jų dvigubėjimo periodas yra mažesnis nei metai (per metus triušiai gali atsivesti tris vadas!), tai ir toliau nekliudomai vykstant tokiam eksponentiniam augimui, triušių skaičius mažiau nei per 50 metų viršytų žmonių Žemėje skaičių. Praktiškai tokį eksponentinį augimą po kurio laiko pristabdo riboti maisto ištekliai bei natūralūs triušių priešai.

Taip pat ir Žemės gyventojų skaičius, kuris šiuo metu tam tikru tikslumu didėja eksponentiškai su 30–40 metų dvigubėjimo periodu, negalės eksponentiškai augti visą laiką. Mat tokiu atveju per 300–400 metų Žemės gyventojų skaičius padidėtų tūkstančius kartų! Galbūt augimo daugiklis 10–20 ir būtų galimas, tačiau 1000 yra neįmanomas. Dėl ribotų išteklių kiltų tokios katastrofos kaip visuotinis badas, epidemijos, karai ir pan., ir visa sistema sugriūtų – nebent mes patys imtume kontroliuoti gyventojų skaičiaus didėjimą, ir jis būtų pristabdytas kitokiu būdu.

Būdamas panašus į sprogimą eksponentinis augimas lenkia bet kokį tiesinį augimą, ir ši aplinkybė sutelkė dingstį niūriausioms žmonijos ateities prognozėms. Štai T. R. Maltusas* manė, jog maisto ištekliams didėjant tiesiškai, o gyventojų skaičiui – eksponentiškai, bado katastrofa yra neišvengiama.

* *Thomas Robert Malthus* (1766–1835), anglų dvasininkas ir ekonomistas, veikalo „Augimo ribos“, kuriame teigiama, kad žmonių skaičius auga greičiau negu pragyvenimo ištekliai, autorius.

Jei tik modelyje slypi eksponentinis augimas, tai modelis būtinai sugrius. Tokia ir yra knygos „Augimo ribos“ pagrindinė tema. Knygoje teigiama, jog vartojimas auga eksponentiškai, o ištekliai lieka riboti, todėl vartojimas negali išlikti toks pat, ir visuomenė patirs beviltišką išteklių stoką, jei tik vystymosi kryptis neims keistis.

Išvada: *tiek eksponentiškai, tiek tiesiškai augantys neslopinami dydžiai gali didėti tik tam tikrą apibrėžtą laiką, kol nepasireiškia ribojimai.*

1. Jei dabartinės gyventojų skaičiaus didėjimo, pramonės augimo, aplinkos teršimo, maisto produktų gamybos ir neatkuriamųjų išteklių suvartojimo tendencijos nepakis, tai augimo mūsų planetoje ribos bus pasiektos per artimiausius šimtą metų. Tikėtina, kad gyventojų skaičius bei gamybos mastai staiga ir nevaldomai kris.
2. Yra įmanoma tokią įvykių eigą pakeisti ir pasiekti ekologinio bei ekonominio stabilumo būseną, kuri išsilaikytų ilgą laiką. Galima suformuoti tokią visuotinę pusiausvyrą, kai kiekvienas Žemės gyventojas turėtų visa, kas būtina jo gyvybinėms reikmėms patenkinti bei jo kūrybinėms galimybėms realizuoti.
3. Pasaulio gyventojams pasiryžus siekti ne 1, bet 2 punkte aprašytos padėties, galimybės ją pasiekti bus juo didesnės, juo anksčiau bus imtasi priemonių.

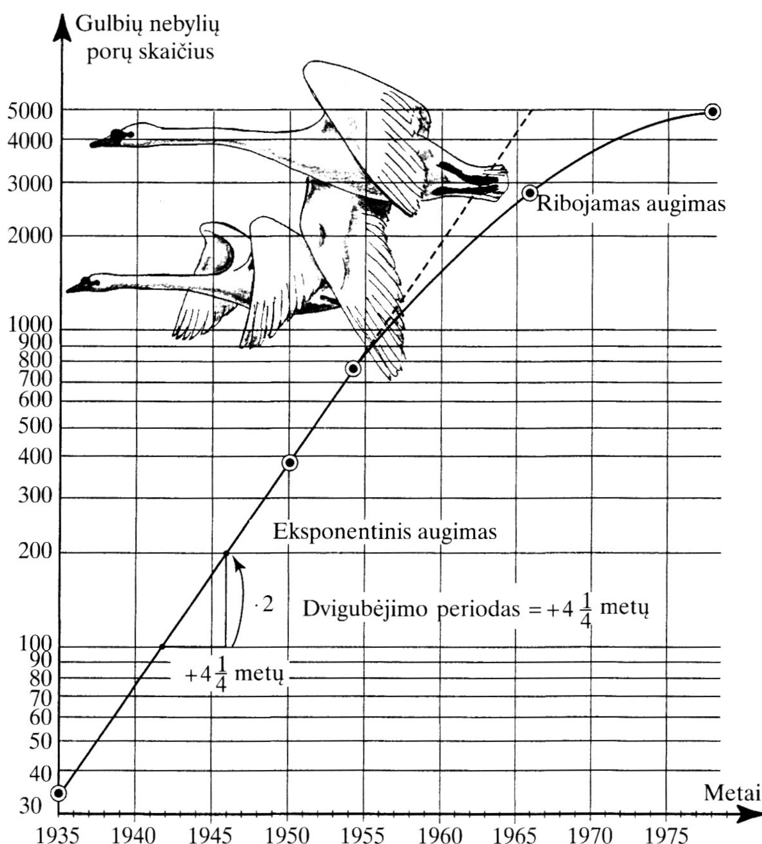
Iš *„Augimo ribos“*

Pavyzdys

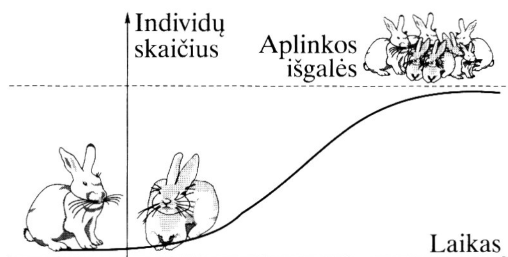
Danijos nacionalinis paukštis, gulbė nebylė, 3-iojo dešimtmečio pradžioje buvo prie išnykimo ribos. Jų tebuvo likę vos keletas porų, kai 1926 m. gulbė nebylė buvo paskelbta saugomu paukščiu. Tai davė pradžią neslopinamo augimo periodui:

Metai	1935	1950	1954	1966	1978
Gulbių nebylių skaičius	35	385	758	2740	5000

Atidėjus šias reikšmes pusiau logaritminėje koordinačių sistemoje, matyti, jog pirmieji trys taškai yra vienoje tiesėje. Taigi nuo 1935 iki 1955 m. gulbių skaičius augo eksponentiškai su dvigubėjimo periodu apie $4\frac{1}{4}$ metų, atitinkančiu augimo daugiklį $a = \sqrt[4\frac{1}{4}]{2} \approx 1{,}1771$, t. y. beveik 18% metinį prieaugį. Tačiau vėliau ėmė reikštis ribojimai ir dabar augimas lėtėja.



Taikant neslopinamo augimo modelį, svarbu gebėti teisingai įvertinti tą laiko tarpsnį, kuriame modelis yra realus, ir teisingai aprašyti, kas vyksta pradėjus reikštis ribojimams. Paprastai populiacijos augimas esti slopinamas, kol galiausiai ji nusistovi ties pusiausvyros reikšme, atitinkančia *aplinkos išgales*. Gauname augimo kreivę, *stačiakampėje* koordinačių sistemoje atrodančią šitaip:



Tai vadinama S formos augimu.

222

2.7. Kombinuotasis augimas

Panagrinėsime dar vieną augimo modelių taikymo pavyzdį: kaip žmogaus organizmas įsisavina ir šalina nuodingąsias medžiagas. Kad būtų paprasčiau, visą dėmesį skirsime *sunkiesiems metalams*: gyvsidabriui, švinui ir kadmiui. Ne visuomet žmonės žinojo apie jų pavojingumą, – tai buvo suvokta pastaruoju metu, beje, dar ir po to, kai Japonijoje nutekėjus pramoninėms atliekoms įvyko keletas sunkių apsinuodijimų.



Minamatos tragedija.
6-ojo dešimtmečio pradžioje Japonijos žvejų miestą Minamatą ištiko baisi neganda: iš pradžių ėmė keistai elgtis gyvūnai – kniaukdamos be nuovokos lakstė katės, stačiai iš dangaus krito varnos, po to atėjo ir žmogaus eilė – ėmė trikti regėjimas, svaigti galva ir galiausiai sutriko mąstymas.

Sunkiųjų metalų nuodingumas

Problemos, susijusios su sunkiųjų metalų nuodingumu, buvo žinomos jau seniai – dar XVIII a. buvo perspėjama nenaudoti raudonojo cinoberio (HgS) lūpoms dažyti bei skruostams rausvinti: „Tiems, kurie tokie kvaili, kad naudoja cinoberį, paprastai atsiranda burnos vėžys, ima pūti dantenos, išklimba dantys, iš burnos sklinda nemalonus kvapas“.

Tačiau tik po tokių nelaimių, kaip Minamatos tragedija, buvo rimtai susirūpinta dėl gyvsidabrio naudojimo žemės ūkyje (grūdų beicavimui) bei dažno nekontroliuojamo gyvsidabrio nutekėjimo į aplinką pramonėje.

Išleidus didelį kiekį gyvsidabrio ir gyvsidabrio druskų – kaip Minamatoje – tiesiai į jūrą, didžioji jų dalis nusėda ant dugno. Kadangi tai *neorganinis junginys*, galėtume manyti, jog toks gyvsidabrio nutekėjimas į jūrą neturėtų būti labai pavojingas. Bet kaip parodė Minamatos tragedija, nėra taip paprasta. Nors gyvsidabrio druskos ir nusėda ant dugno, čia tam tikros bakterijos perdirba jas į vandenyje tirpų metilo gyvsidabrį. Metilo gyvsidabrį (pro žiaunas) įsisavina žuvys, o jas suvalgius žmonėms bei gyvūnams, tokiu būdu susidaręs *organinis gyvsidabris* kaupiasi visoje mitybos grandinėje. Štai toks kaupimasis ir sukėlė Minamatos tragediją.

Sunkieji metalai į organizmą patenka per maistą, geriamąjį vandenį ir įkvepiamą orą. Jie yra neatskiriama mus supančios aplinkos dalis, tačiau pastaraisiais dešimtmečiais dėl žmonių sukeltos taršos jų koncentracija yra labai padidėjusi.

Į mūsų organizmą *nuolat patenka* sunkiųjų metalų, normaliomis sąlygomis tai sudaro tam tikrą pastovų kiekį per dieną. Todėl į organizmą patekusių sunkiųjų metalų kiekis laikui bėgant *auga tiesiškai.*

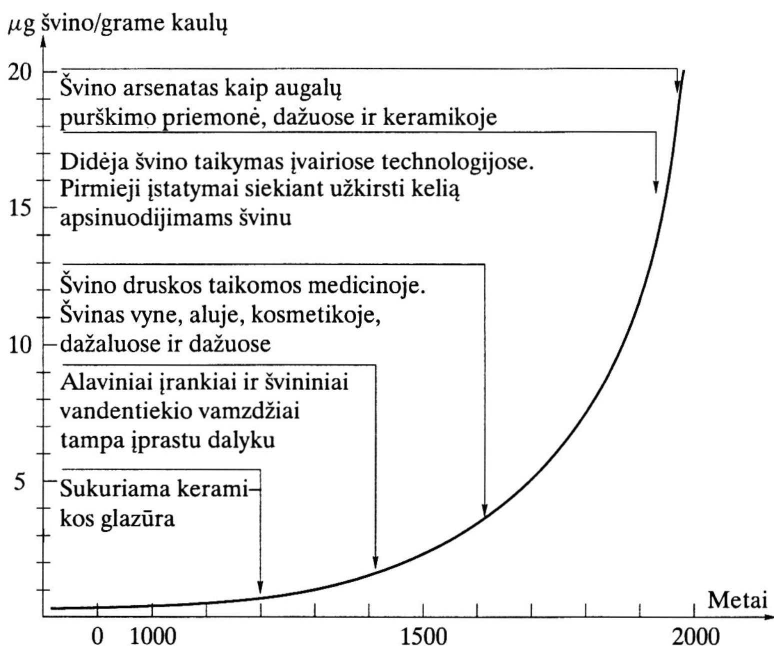
Laimė, mūsų organizmas tuos sunkiuosius metalus geba pašalinti. Paprastai organizmas kasdien pašalina tam tikrą dalį kiekvieno organizme esančio sunkiojo metalo. Tai atlieka, pavyzdžiui, kepenys ir inkstai, išskirdami iš pro juos pratekančio kraujo tam tikrą dalį sunkiųjų metalų. Taigi mūsų organizmas sunkiuosius metalus *šalina eksponentiškai.*

Tokiu būdu organizme esančių sunkiųjų metalų kiekį lemia šie du rodikliai:

1) į organizmą per dieną patenkantis sunkiųjų metalų kiekis;

2) biologinis sunkiųjų metalų puskiekio periodas.

Remiantis šių dviejų dydžių reikšmėmis, galima apskaičiuoti sunkiųjų metalų kiekį organizme, kai jis yra pusiausvyroje su aplinka. Šis kiekis vadinamas *organizmo balastu.* Iš pateikiamų pavyzdžių paaiškės, kaip tas organizmo balastas apskaičiuojamas.

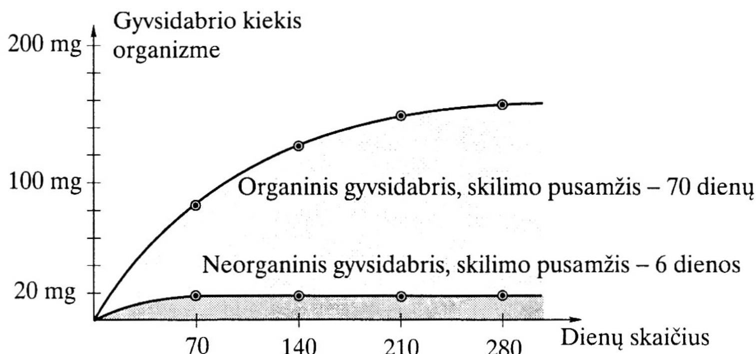


Švino kiekis Danijos gyventojų kauluose nuo 1000 m. pr. Kr. iki 1972 m.
(1 μg = 1 mikrogramas = 10^{-6}gramo).

Gyvsidabrio junginius apytiksliai galima suskirstyti į dvi grupes:

a) *neorganiniai junginiai*, kaip antai gyvsidabrio druskos: cinoberis (HgS), gyvsidabrio oksidas (HgO), gyvsidabrio chloridas ($HgCl_2$) ir gyvsidabrio sulfatas ($HgSO_4$);

b) *organiniai junginiai*, kaip antai gyvsidabrio ir angliavandenilių junginiai: metilo gyvsidabrio jonai (CH_3Hg^+), dimetilgyvsidabris (CH_3HgCH_3) ir fenilgyvsidabrio jonai ($C_6H_5Hg^+$).



Gyvsidabrio kaupimasis organizme. Per 9 mėnesius susikaupia 10 kartų daugiau organinių gyvsidabrio junginių nei neorganinių.

Organiniai gyvsidabrio junginiai yra kur kas pavojingesni. Jie tirpsta riebaluose, lengvai kaupiasi organizme ir yra sunkiai skaidomi bei šalinami.

Tarkime, kad mes kasdien įsisaviname 2 mg neorganinių gyvsidabrio junginių. Biologinis šios tarytum nepavojingos gyvsidabrio formos puskiekio periodas yra 6 dienos. Todėl daugiklis a randamas taip:

$$a^6 = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow a = \sqrt[6]{\frac{1}{2}} \approx 0,8909.$$

Taigi procentinis prieaugis yra:

$$a = 1 + r \Longleftrightarrow r = 1 - a = -0,1091 = -10,91\% \approx -11\%.$$

Tad kas dieną išskiriame apie 11% neorganinio gyvsidabrio. Jeigu 11% nuo organizme esančio neorganinio gyvsidabrio yra *mažiau* už tuos kasdien įsisavinamus 2 mg, tai per dieną įsisavinsime daugiau, negu pašalinsime, ir neorganinio gyvsidabrio kiekis organizme didės.

O jeigu 11% nuo kūne esančio neorganinio gyvsidabrio yra *daugiau* nei tie 2 mg, per dieną jo pašalinsime daugiau, negu įsisaviname, ir neorganinio gyvsidabrio kiekis organizme mažės.

Galiausiai organizme nusistovės toks neorganinio gyvsidabrio kiekis, kad 11% atitiks būtent 2 mg, ir tokiu būdu *per dieną bus įsisavinama tiek pat kiek pašalinama.* O tuomet nesunku surasti ir organizmo balastą, nes 11% atitinka 2 mg, taigi 1% atitinka $\frac{2}{11}$ mg, ir todėl 100% atitiks

$$\frac{2}{11} \cdot 100 = 18{,}18 = \text{apie } 18 \text{ mg}.$$

Jeigu per dieną įsisaviname 2 mg neorganinio gyvsidabrio, tai iš viso jo organizme turime 18 mg.

Visai kitaip būtų, jei kasdien įsisavintume 2 mg organinio gyvsidabrio junginio, pavyzdžiui, metilgyvsidabrio. Organiniai gyvsidabrio junginiai yra kur kas pavojingesni už neorganinius, nes organizmas juos sunkiau šalina. Puskiekio periodas čia yra 70 dienų, todėl daugiklis a bus:

$$a^{70} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow a = \sqrt[70]{\frac{1}{2}} \approx 0{,}9901,$$

o procentinis prieaugis r.

$$a = 1+r \Longleftrightarrow r = 1-a, \text{ taigi } r = -0{,}0099 = -0{,}99\% \approx -1\%.$$

Tad per dieną išsiskirs apie 1% organinio gyvsidabrio: 1% atitinka 2 mg, tai 100% atitiks 200 mg.

Teoriškai gyvsidabrio kiekis organizme augs, kol pasieks 200 mg, bet praktiškai mirštama dar toli gražu nesulaukus tokios ribos (jau viršijus 100 mg, pasireiškia sunkaus apsinuodijimo požymiai).

Šie pavyzdžiai rodo, jog organizmo balastas, t. y. mūsų kūne esantis sunkiųjų metalų kiekis priklauso nuo dviejų veiksnių: per dieną į organizmą patenkančio metalų kiekio ir tų metalų puskiekio periodų. Organizmo balastas – tai tas kiekis, kuris būna mūsų organizme, jam esant pusiausvyroje su aplinka – kai organizmas tiek pat pašalina, kiek įsisavina. Dabar nėra abejonių, jog norint išvengti gyventojų sveikatos sutrikimų, reikia kiek galima labiau apriboti per dieną į organizmą patenkantį sunkiųjų metalų kiekį.

Yra nustatyti maksimalūs per dieną į organizmą patenkantys kiekiai, kurie, *kaip manoma,* dar yra ganėtinai nepavojingi. Tokie kiekiai vadinami medžiagų *TDD reikšmėmis* (kur TDD reiškia „toleruotina dienos dozė“). Jos gali būti nustatytos medžiagos kiekiui ore, vandenyje ir įvairiuose maisto produktuose.

Sunkiųjų metalų vidutinė TDD	Organinis gyvsidabris	Neorganinis gyvsidabris	Švinas	Kadmis
μg/kg kūno svorio	0,5	0,7	7	1
Biologinis puskiekio periodas (dienomis)	70	6	3000	9000

223 224 225 226 227

2.8. Kombinuotojo augimo lentelės

Palyginti nesunku sudaryti lentelę tokio augimo, kuris, kaip praeitame skyriuje, būtų tiesinio ir eksponentinio augimų derinys.

Pavyzdys
Tarkime, kad dydis y kasdien iš pradžių *sumažėja perpus* (todėl ši augimo dedamoji yra eksponentinė), vėliau *išauga* 16 vienetų (taigi ši augimo dedamoji yra tiesinė). Tuomet tokio kombinuoto augimo pusiausvyros reikšmė bus 32, nes 32 pusė kaip tik ir yra 16. Nusistovėjus šiai pusiausvyros reikšmei, per dieną kiek atimsime, tiek ir pridėsime. Pradėję nuo reikšmės $y = 0$, gausime šitokius skaičius:

1 dieną: 0 dalijama pusiau ir pridedama 16: $0 + 16 = 16$
2 dieną: 16 dalijama pusiau ir pridedama 16: $8 + 16 = 24$
3 dieną: 24 dalijama pusiau ir pridedama 16: $12 + 16 = 28$
4 dieną: 28 dalijama pusiau ir pridedama 16: $14 + 16 = 30$
5 dieną: 30 dalijama pusiau ir pridedama 16: $15 + 16 = 31$
6 dieną: 31 dalijama pusiau ir pridedama 16: $15\frac{1}{2} + 16 = 31\frac{1}{2}$
ir t. t.

x (dienos)	0	1	2	3	4	5	6	...
y	0	16	24	28	30	31	$31\frac{1}{2}$	...

Surašę gautuosius skaičius į lentelę, matome du dalykus: visų pirma, y, kaip ir tikėtasi, artėja prie pusiausvyros reikšmės 32. Antra: tos pusiausvyros reikšmės ir y skirtumas kasdien sumažėja perpus!

x (dienos)	0	1	2	3	4	5	6	...
$32 - y$	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	...

Iš šio pavyzdžio aišku, jog kombinuoto augimo reikšmes nesunkiai galima rasti pasinaudojus pusiausvyros reikšmės ir y skirtumu:
Jeigu kombinuotojo augimo pusiausvyros reikšmė yra y^*, tai skirtumas $(y^* - y)$ kinta tik eksponentiškai su tokia pat dvigubėjimo ar puskiekio konstanta kaip ir to kombinuotojo augimo laipsnio dedamoji.

O dabar vėl grįžkime prie mūsų pokalbio apie gyvsidabrio kaupimąsi.

Sužinojome, kad *neorganinių* gyvsidabrio junginių:

biologinis puskiekio periodas – 6 dienos;

pusiausvyros reikšmė – 18 mg.

Jeigu įsivaizduosime, kad mes (stebuklingai!) išsivalėme nuo neorganinių gyvsidabrio junginių, tai galėsime sudaryti lentelę, rodančią, kaip jie vėl kaupsis:

x (dienos)	0	6	12	18	24	30	...
$18 - y$	18	9	4,5	2,25	1,13	0,56	...
y	0	9	13,5	15,75	16,87	17,44	...

Todėl praktiškai vos per mėnesį vėl prisisotintume neorganinių gyvsidabrio junginių.

Organinių gyvsidabrio junginių:

biologinis puskiekio periodas – 70 dienų;

pusiausvyros reikšmė – 200 mg.

Jeigu įsivaizduosime, kad mes (vėl stebuklingai!) išsivalėme nuo organinių gyvsidabrio junginių, tai galėsime sudaryti lentelę, rodančią, kaip jie vėl kaupsis:

x (dienos)	0	70	140	210	280	350	...
$200 - y$	200	100	50	25	12,5	6,25	...
y	0	100	150	175	187,5	193,75	...

Todėl praktiškai per metus mes vėl prisisotintume organinių gyvsidabrio junginių (žr. grafiką 49 p.).

Panagrinėsime kitą svarbų kombinuotojo augimo pavyzdį – *periodinį paskolos grąžinimą*. Šiuo atveju čia po kiekvieno termino prie paskolos priskaičiuojamos palūkanos (eksponentinis augimas), o mes po kiekvieno termino grąžiname pastovią sumą (tiesinis augimas). Bet šį kartą vaidmenys priešingi: tiesinis augimas skolą mažina, o eksponentinis didina. Čia irgi egzistuoja *pusiausvyra*, t. y. tam tikras skolos dydis, kuomet *grąžinama įmoka tiksliai kompensuoja palūkanas.* Tačiau šįkart pusiausvyra

yra nestabili: jei palūkanos bent truputėlį didesnės už įmoką, skola lėtai, bet užtikrintai ima didėti ir neilgai trukus ima augti kaip griūtis – pakliūvame į palūkanų spąstus; ir atvirkščiai – jei grąžinama įmoka didesnė už palūkanas, skola ima nykti ir lėtai, bet užtikrintai grąžinama.

Daug 8-ojo ir 9-ojo dešimtmečio Danijos studentų buvo patekę į tokius palūkanų spąstus. Jie ėmė valstybės paskolą studijoms, palūkanos buvo priskaičiuojamos studijų metu, o viską reikėjo grąžinti baigus studijas ir pradėjus dirbti. Tačiau dėl augančių palūkanų normų, ilgos studijų trukmės ir menkų galimybių užsidirbti baigus studijas daugelis atsidūrė palūkanų spąstuose. Skolos taip išaugo, jog vien metinės palūkanos žymiai viršijo tą sumą, kurią jie galėjo įmokėti. Viskas baigėsi tuo, kad jie įklimpo į milžinišką skolą, iš kurios patys jau nebegalėjo išsikapstyti.

Panašiai atsitiko ir daugeliui trečiojo pasaulio šalių, kaip pagalbą atsistoti ant kojų gavusių iš turtingųjų šalių paskolas, tačiau jų ekonominė padėtis tik pablogėjo, ir nėra jokių galimybių grąžinti net palūkanas. Toms šalims irgi belieka tikėtis, kad turtingosios šalys bent iš dalies skolas nurašys.

Pavyzdys

Jokūbas ima 40 000 Lt paskolą su pusmetinių $r = 6\%$ palūkanų norma. Paskola turės būti grąžinama pusmetinėmis 3000 Lt įmokomis. Taigi Jokūbo skola kas pusmetį išaugs 6% (eksponentinė augimo dedamoji), bet kita vertus, ir sumažės 3000 Lt (tiesinė dedamoji). Paskolos g pusiausvyros reikšmė bus tokia suma g^*, kuomet nuo jos priskaičiuojamas 6% palūkanas tiksliai kompensuos 3000 Lt įmokos:

6% atitiks 3000 Lt;

1% atitiks $\frac{3000}{6} = 500$ Lt;

100% atitiks 50 000 Lt.

50 000 Lt yra *kritinė skola*, t. y. didžiausia skola, kurią įmanoma įveikti 3000 Lt įmokomis. O kadangi pradinės paskolos dydis (40 000 Lt) yra mažesnis už tą kritinę skolą, tai priskaičiuojamos palūkanos visą laiką bus mažesnės už reguliariai įmokamą sumą, skola po truputį mažės, ir atstumas iki kritinės skolos per kiekvieną pusmetį augs daugikliu 1,06.

Terminų skaičius n	0	1	2	3	...	n	...
$g^* - g$	10 000	10 600	11 236	11910,16	...	50 000	...

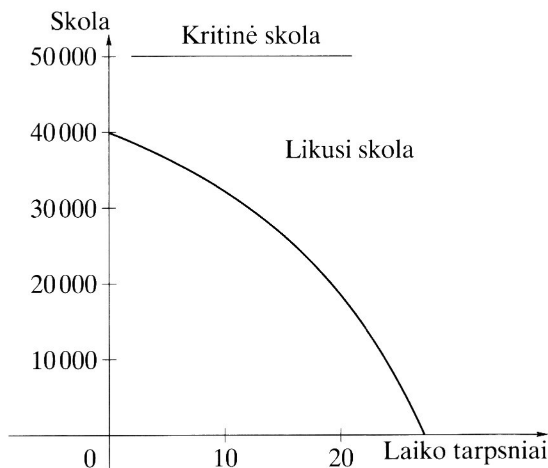
Iš pradžių tas atstumas yra $g^* - g = 10\,000$ Lt, o paskolą grąžinus, t. y., kai skolos nelieka – 50 000 Lt. Taigi galutinis atstumas yra lygiai

5 kartus didesnis už pradinį. Kad rastume, kiek laiko reikės Jokūbui paskolai grąžinti, apskaičiuosime terminų skaičių n: $1{,}06^n = 5$. Pamėginę apskaičiuoti skaičiuokliu, gausime $1{,}06^{27} \approx 4{,}82$, $1{,}06^{28} \approx 5{,}11$. Taigi kol Jokūbas grąžins paskolą, praeis 28 terminai arba – 14 metų.

Paskolos grąžinimo formulė yra tokia:

$g = 50\,000 - 10\,000 \cdot 1{,}06^n$,

o grafikas atrodo taip:



Tai yra tipiškas paskolos grąžinimo grafikas. Iš pradžių skola mažėja lėtai, bet gerokai apmažėjusi, ima nykti vis sparčiau.

Pavyzdys

Jauna pora nori imti 10 metų paskolą būstui įsigyti su 8% metinėmis palūkanomis. Jie įstengtų kasmet įmokėti 24 000 Lt. Kiek jie gali skolintis?

Atsakymas: kritinė skola yra tokia skola, kuomet įmokama suma tiksliai kompensuoja palūkanas:

8% atitiks 24 000 Lt; 1% atitiks 3 000 Lt; 100% atitiks 300 000 Lt. Taigi maksimalus paskolos dydis galėtų būti 300 000 Lt – jeigu grąžinimo terminas nebūtų ribotas. Bet paskola turės būti grąžinta per 10 metų, todėl atstumas iki kritinės skolos turi išaugti daugikliu $1{,}08^{10} \approx 2{,}158925$. O galutinis atstumas lygus būtent kritinei skolai, todėl pradinis atstumas turi būti $300\,000 : 2{,}158925 \approx 138\,958{,}05$ Lt.

Taigi jie gali imti $300\,000 - 138\,958{,}05 = 161\,041{,}95$ Lt paskolą.

228 229

2.9. Laipsninės funkcijos

Jeigu du *teigiami* dydžiai x ir y susiję formule

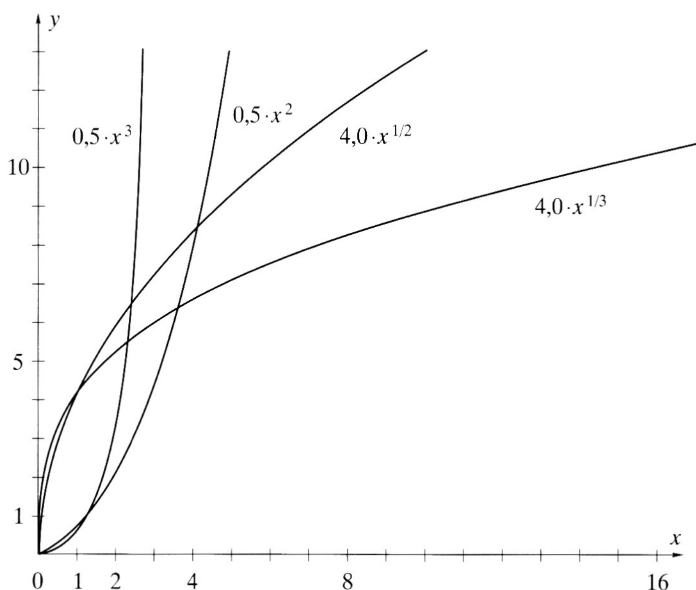
$$y = b \cdot x^a,$$

tai sakome, kad y yra *laipsninė x funkcija.* Laipsninei funkcijai būdinga tai, jog x padauginus iš tam tikro daugiklio c, y taip pat padauginamas iš tam tikro daugiklio, būtent iš c^a.

Pavyzdys: Kai kurių laipsninių funkcijų lentelė ir grafikai

	x	1	2	4	8	16	32	64
1	$0{,}5 \cdot x^2$	0,50	2,00	8,00	32,0	128	512	2048
2	$0{,}5 \cdot x^3$	0,50	4,00	32,0	256	2048	16 348	13 1072
3	$4{,}0 \cdot x^{1/2}$	4,00	5,66	8,00	11,3	16,0	22,6	32,0
4	$4{,}0 \cdot x^{1/3}$	4,00	5,04	6,35	8,00	10,1	12,7	16,0

Akivaizdu, jog x padvigubėjus, y pirmuoju atveju padidėja keturis kartus, o antruoju – aštuonis. Trečiuoju atveju y padvigubėja, kai x padidėja keturis kartus. Ketvirtuoju atveju y padvigubėja, kai x padidėja aštuonis kartus.



Laipsninės funkcijos pasitaiko daugybėje įvairių sąryšių.

„... *Patirtis rodo, jog važiavimo kainai pakilus 10%, prarandame 3% keleivių“– teigia Valstybinio autobusų parko (VAP) finansų direktorius. VAP transporto keleivių mažėja, dėl to bendrovei trūksta lėšų, taigi bilietų kainos kitais metais pakils iki 19%. VAP nepajėgus konkuruoti su privačių automobilių transportu, – daro išvadą ekspertas.*

Iš šios ištraukos matyti, jog bilietų kainai padidėjus 10%, VAP praranda 3% keleivių. Todėl bilietų kainą x padauginus iš daugiklio $1 + \frac{10}{100} = 1{,}10$, keleivių skaičių y reikia padauginti iš $1 - \frac{3}{100} = 0{,}97$.

Čia remiamasi prielaida, kad keleivių skaičius yra laipsninė bilietų kainos funkcija.

Laipsninės funkcijos yra labai dažnos, todėl būtų pravartu gebėti iš grafiko nustatyti, ar duotoji funkcija yra laipsninė.

Pratimas

Logaritminėje koordinačių sistemoje nubraižykite šių laipsninių funkcijų (žr. funkcijų lentelę 55 p.) grafikus:

1) $y = 0{,}5 \cdot x^2$; 2) $y = 0{,}5 \cdot x^3$; 3) $y = 4 \cdot x^{1/2}$; 4) $y = 4 \cdot x^{1/3}$.

Kaip matyti iš šių pavyzdžių, laipsninės funkcijos grafikas *logaritminėje koordinačių sistemoje* yra *tiesė*. Laipsninės funkcijos augimą galima nusakyti jos grafiko – tiesės – krypties koeficientu. Logaritminės skalės negalima naudoti atstumams matuoti. Krypties koeficientas nustatomas paprasčiausia liniuote.

Pratimas

Naudodamiesi liniuote, raskite pateikto pratimo tiesių krypties koeficientus. Kokią išvadą padarytumėte?

Teisingas toks teiginys:

Jei funkcijos grafikas logaritminėje koordinačių sistemoje yra tiesė, tai ta funkcija laipsninė:

$y = b \cdot x^a$.

Tos tiesės krypties koeficientas yra laipsnio rodiklis a.

Pavyzdys

Rūdijant metalo lydiniui, rūdžių sluoksnis ilgainiui auga. Tam tikram metalo lydiniui buvo gautas toks sąryšis:

Mėnesių skaičius	2	3	4	6	12	24
Rūdžių sluoksnio storis (mm)	0,16	0,22	0,28	0,39	0,70	1,24

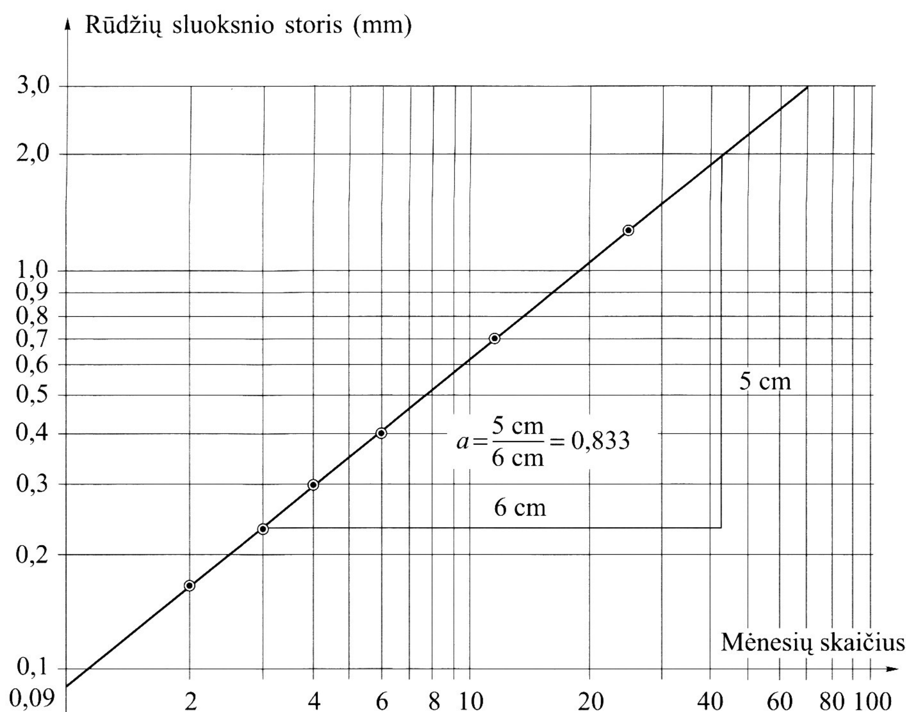
Atidėję šias reikšmes logaritminėje koordinačių sistemoje, matome, jog taškai išsidėstę vienoje tiesėje.

Taigi rūdžių sluoksnis auga kaip laipsninė laiko funkcija. Iš piešinėlio matome, jog laipsnio rodiklis yra

$$a = \frac{5 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} \approx 0,833,$$

o pradinė reikšmė $b = 0,09$. Todėl sąryšį tarp rūdžių sluoksnio storio y ir laiko x galima užrašyti tokia lygtimi:

$$y = 0,09 \cdot x^{0,833}.$$

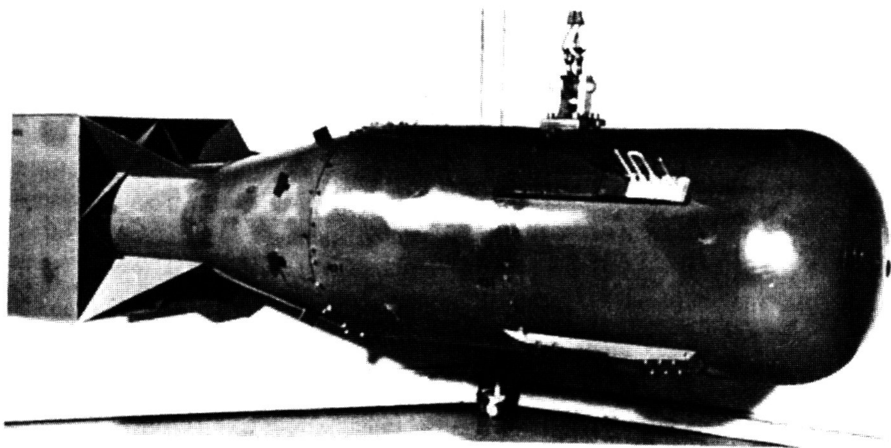


Atlikę panašią analizę, galime įvertinti iš tam tikro lydinio pagamintų cisternų ar statinių tarnavimo laiką. Pavyzdžiui, grafike randame, jog po 43 mėnesių, t. y. maždaug po 3,5 metų, rūdžių sluoksnis bus 2 mm storio.

3. Radioaktyvumas



Plaukiantys elniai. Piešinys iš Lasko (Lascaux) olos. Radioanglies datavimo metodu nustatyta, kad jo amžius – 1500 metų.



„Little boy" – tai pirmoji pasaulyje kare panaudota atominė bomba – 1945 rugpjūčio 6 d. 8.15 ryto Hirosimoje. Ilgis – apie 3 metrai, masė – apie 4 tonos.

Apie ką pagalvojate, išgirdę žodį „radioaktyvumas"? Pasižymėkite svarbiausias mintis. Papasakokite vienas kitam, ką užsirašėte ir suskirstykite visa tai į dvi grupes: kas kelia teigiamas asociacijas ir kas kelia neigiamas asociacijas.

Trumpai pagrįskite tokį skirstymą.

3.1. Įvadas

Radioaktyvumo atradimas

Prancūzas A. Bekerelis (*Henri Becquerel*) 1895 m. dirbo su tam tikrais mineralais, kurių sudėtyje buvo ir cheminio elemento urano. Apšviesti saulės mineralai „švytėdavo“, ir Bekerelis nutarė ištirti, ar toje spinduliuotėje, be atspindėtos regimosios šviesos, nebus dar ir Rentgeno spindulių.

Palaikęs mineralus saulės šviesoje, jis įvyniojo juos į juodą šviesai nepralaidų popierių ir padėjo tamsioje patalpoje šalia fotografijos plokštelių. Jeigu mineralai spinduliuotų vien paprastą regimąją šviesą, tai juodas popierius apsaugotų nuo jos fotografijos plokšteles ir šios nepajuoduotų; o jeigu spinduliuotėje yra ir Rentgeno spindulių, tai popierius jiems ne kliūtis, ir fotoplokštelės sureaguotų. Plokštelės pajuodavo.

Ir vis dėlto, norėdamas įsitikinti savo išvada, Bekerelis panoro atlikti bandymą dar sykį. Deja, kitas dienas buvo visiškai apsiniaukę. Bekerelis laikė paruošęs įvyniotus mineralus ir tik laukė pasirodant saulės. Po kelių prailgusio laukimo dienų jis nutarė išryškinti porą naujų fotoplokštelių, gulėjusių šalia mineralų – tik pažiūrėti, ar jau nuslopo ta spinduliuotė. Dideliam jo nustebimui, fotoplokštelės buvo pajuodavusios. Nors ir neapšviesti, mineralai akivaizdžiai spinduliavo. Tolesni tyrimai patvirtino, jog tie mineralai spinduliuoja visą laiką.

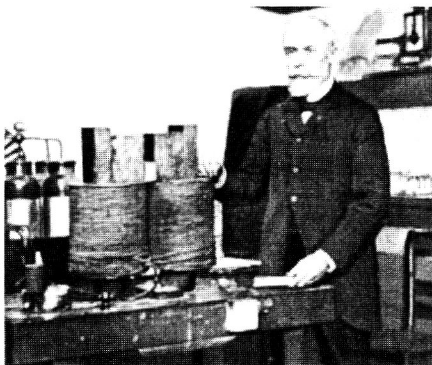
1898 m. lenkų kilmės prancūzų mokslininkei M. Kiuri (*Maria Skłodowska-Curie*) pavyko įrodyti, jog tą paslaptingą neregimąjį mineralų spinduliavimą sukėlė urano atomai. Šį reiškinį Kiuri pavadino *radioaktyvumu.*

Kartu su savo vyru P. Kiuri (*Pierre Curie*) jai pavyko gauti ir kitą radioaktyvų (tuomet dar nežinomą) cheminį elementą – radį. Iš 1 t dervingos urano rūdos – nasturano – jie išskyrė 200 mg radžio.

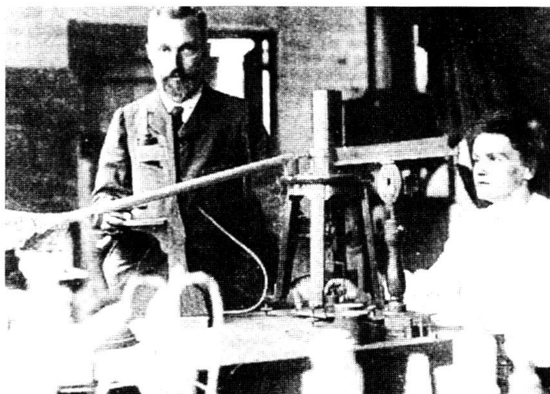
Netrukus buvo išsiaiškinta, jog radis yra itin stiprus spinduliuotės šaltinis – toks stiprus, kad buvo galima tiesiogiai stebėti ir biologinį jo poveikį (pavyzdžiui, nudegimus ant laborantų rankų).

1903 m. M. Kiuri kartu su P. Kiuri ir A. Bekereliu gavo Nobelio fizikos premiją. Ta proga P. Kiuri kalbėjo:

„Mes nepaliaujame galvoti, kad nusikaltėlių rankose radis gali tapti labai pavojingas. Todėl privalome paklausti savęs, ar žmonija turės naudos sužinojusi gamtos paslaptis, ar žmogus yra pakankamai brandus pasinaudoti jomis, ar jo žinios nepadarys žalos pasauliui . . . Aš esu vienas iš tų, kurie tiki, kad žmonija panaudos naujus atradimus labiau gėriui nei blogiui“.



Anri Bekerelis savo laboratorijoje. 1895 m. jis konstatavo, kad kai kurių urano druskų paveikta fotografijos plokštelė pajuoduoja – taip buvo atrastas radioaktyvumas.



Marija ir Pjeras Kiuri savo laboratorijoje 1898 m. Marija Kiuri 1911 m. gavo Nobelio premiją antrą kartą – šį kartą už darbus chemijos srityje. Tuo pat metu vyko karštos diskusijos, ar galima moterį priimti į Paryžiaus MA. Marija Kiuri taip ir netapo jos nare.

Kaip matuojamas radioaktyvumas?

Paprasčiausias būdas, kuriuo galima nustatyti, ar tiriamasis objektas radioaktyvus – tai pamatuoti vadinamuoju *Geigerio skaitikliu.* Geigerio skaitiklis registruoja kūno radioaktyvumą impulsais, paprastai parodydamas jų skaičių skalėje. Garsiakalbiu tokį registravimą galima padaryti ir girdimą: vienas impulsas – vienas spragtelėjimas.

Net jeigu ir nutolintume visus radioaktyvumo šaltinius nuo Geigerio skaitiklio, vis tiek retsykiais girdėtume spragtelint. Mat radioaktyviųjų spindulių yra visur. Jie sklinda, pavyzdžiui, iš statybinių medžiagų, iš Žemės plutoje esančių dujų (radono), iš kosmoso (kosminė spinduliuotė) ir t. t. Mes nuolat esame silpnai švitinami, ir tai vadinama *fonine spinduliuote.*

Dėl radioaktyviosios spinduliuotės kyla daug klausimų:

Kas tai per reiškinys? Kas gi yra tai, kas priverčia Geigerio skaitiklį reaguoti? Ar tai pavojinga? Kokie turi būti kiekiai, kad būtų pagrindo nerimauti? Kaip nuo to apsisaugoti? Ar galima tai kaip nors naudingai pritaikyti?

Toliau rasite atsakymus į kai kuriuos šių klausimų.

301 302

3.2. Atomų branduoliai

Radioaktyvioji spinduliuotė kyla iš *atomų branduolių*. Radioaktyvūs yra branduoliai (ne spinduliuotė), tad sąvoką „radioaktyvioji spinduliuotė“ reikia suprasti kaip „spinduliuotė, kylanti iš radioaktyviųjų branduolių“.

Atomo branduolį sudaro nepaprastai mažoje erdvės srityje krūvon suspausti protonai ir neutronai.

Branduolio krūvis = protonų skaičiui (Z) = atominiam skaičiui.

Tik šis sveikasis skaičius Z nulemia, kokį turime cheminį elementą (žr. periodinę elementų sistemą knygos gale).

Neutronų skaičius žymimas N, o *nukleonų* (protonų ir neutronų) – A. Taigi

$$A = Z + N.$$

Kiekvieno cheminio elemento (pavyzdžiui, kalio K) atomų branduoliuose *visuomet* būna toks pat protonų skaičius (pavyzdžiui, kalio $Z = 19$). Užtat neutronų skaičius gali skirtis, ir tokie įvairūs branduolio variantai vadinami *izotopais*. Labiausiai žinomi šie kalio izotopai:

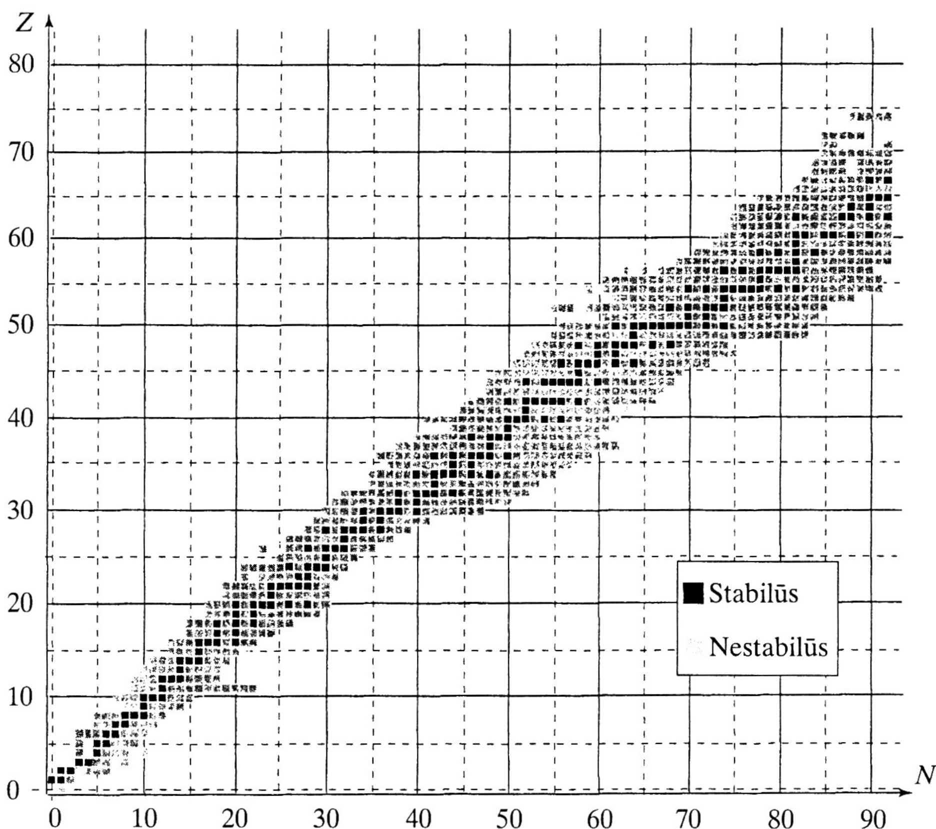
${}^{39}_{19}\mathrm{K} = {}^{39}\mathrm{K}$	${}^{40}_{19}\mathrm{K} = {}^{40}\mathrm{K}$	${}^{41}_{19}\mathrm{K} = {}^{41}\mathrm{K}$
$A = 39$	$A = 40$	$A = 41$
$Z = 19$	$Z = 19$	$Z = 19$
$N = 20$	$N = 21$	$N = 22$
93,2%	6,8%	0,0118%

Apatinės eilutės skaičiai rodo, kiek procentų to izotopo esti gamtoje aptinkamame kalyje.

Kai kurie izotopai yra radioaktyvūs, kiti – ne. Pavyzdžiui, ${}^{40}\mathrm{K}$ yra vienintelis radioaktyvus iš išvardytųjų kalio izotopų.

Užrašas ${}^{40}_{19}\mathrm{K}$ rodo, kad branduolyje yra 19 protonų ir 40 nukleonų. Branduolio bendrą krūvį lemia tiktai protonų skaičius. Kiekvienas protonas prisideda vienu teigiamu elementariu krūviu. Todėl Z galima suvokti ir kaip branduolio *krūvio skaičių*.

	A *yra nukleonų skaičius,*
${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$	X *yra cheminis simbolis,*
	Z *yra branduolio krūvio skaičius.*



Branduolių diagrama.
Kaip akivaizdžiai matyti iš paveikslo, toli gražu ne bet kokia protonų ir neutronų kombinacija sudaro branduolį. Taip pat matyti, jog mažų atominių skaičių Z branduoliuose protonų ir neutronų yra maždaug po lygiai, o didesnių – vis daugiau neutronų.

Branduolio masė

Branduolio fizikoje vartoti masės vienetą kilogramą būtų nepatogu, nes jis per didelis, todėl buvo įvestas vienetas a.m.v. (atominis masės vienetas), kuris lygus 1/12 anglies izotopo ^{12}C atomo masės, t. y.

$$1 \text{ a.m.v.} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\text{kg} = 1{,}66 \cdot 10^{-24}\,\text{g}.$$

Ir protono, ir neutrono masė yra labai artimos 1 a.m.v.:

$$m_{\text{p}} = 1{,}007276 \text{ a.m.v.} \quad \text{ir} \quad m_{\text{n}} = 1{,}008665 \text{ a.m.v.}$$

Todėl branduolio masės, išreikštos atominiais masės vienetais, skaitinė reikšmė visuomet bus labai artima nukleonų skaičiui branduolyje. Pavyzdžiui, ^{4}He branduolio masė yra 4,0015 a.m.v.

Pavyzdys: Branduolių skaičiaus radimas
Žinodami vieno branduolio masę, galime apskaičiuoti, kiek branduolių yra nagrinėjamame medžiagos kiekyje. Pavyzdžiui, rasime, kiek branduolių yra 2,0 gramuose $= 0{,}002$ kg kalio izotopo ^{40}K.
Kadangi vieno ^{40}K branduolio masė yra

$$40\,\text{a.m.v.} = 40 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} = 6{,}64 \cdot 10^{-26}\ \text{kg},$$

tai rasti, kiek 0,002 kilograme yra ^{40}K branduolių, galima apskaičiavus, kiek kartų 0,002 kilograme telpa po $6{,}64 \cdot 10^{-26}$ kg:

$$0{,}002\ \text{kilograme}\ ^{40}\text{K yra}\ \frac{0{,}002}{6{,}64 \cdot 10^{-26}} = 3{,}0 \cdot 10^{22}\ \text{branduolių.}$$

Tai, kad tuose 0,002 kg yra ir elektronų, šiame skaičiavime nėra esminis dalykas, nes elektronų masė labai maža, lyginant su nukleonais. ^{40}K *atomo* masė yra 39,964 a.m.v., o ^{40}K *branduolio* masė – 39,954 a.m.v., taigi abiem atvejais $\approx$ 40,0 a.m.v.

Kadangi 1 a.m.v. $= 1{,}66 \cdot 10^{-24}$ gramo, tai

$$1\ \text{gramas} = \frac{1}{1{,}66 \cdot 10^{-24}}\ \text{a.m.v.} = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \text{a.m.v.}$$

Skaičius $6{,}02 \cdot 10^{23}$ jau mums girdėtas (Avogadro skaičius N_A, I d., 108 p.). Taigi turime: 1 gramas $= N_A$ a.m.v. $= 6{,}02 \cdot 10^{23}$ a.m.v., ir tai visai neatsitiktinis sutapimas – molis taip ir buvo apibrėžtas, kad molio masė (gramais) sutaptų su atomine mase (atominiais masės vienetais).

Molio masė periodinėje elementų sistemoje teikia informacijos apie medžiagos izotopinę sudėtį. Pavyzdžiui, randame, kad kalio atominė masė – 39,10 – remdamiesi tuo, jog gamtoje aptinkamas kalis yra izotopų ^{39}K, ^{40}K ir ^{41}K mišinys, kur ^{39}K sudaro didžiąją dalį (žr. 61 p.).

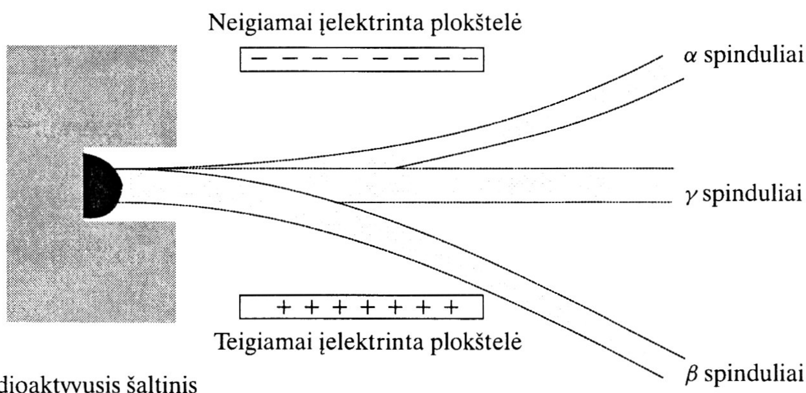
303 304 305

3.3. Alfa, beta ir gama skilimas

Skiriami trijų tipų radioaktyvieji procesai:

alfa (α), *beta* (β) *ir gama* (γ) *skilimai*, kuriems vykstant skleidžiami atitinkamai α, β ir γ spinduliai.

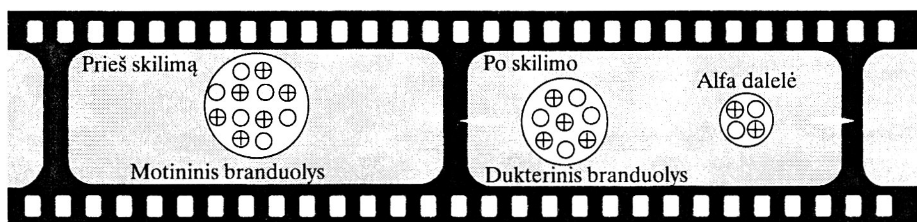
α ir β yra dalelių srautai, o γ – tai elektromagnetinės bangos. Šie spinduliuotės tipai vienas nuo kito skiriasi, be kita ko, tuo, kad jie nevienodai nukrypsta elektriniame ir magnetiniame lauke.



Alfa, beta ir gama spindulių nukrypimas. α spinduliai nukrypsta link neigiamos plokštelės – pačios dalelės yra teigiamos. β spinduliai nukrypsta link teigiamos plokštelės – pačios dalelės yra neigiamos. γ spinduliai praeina nepaveikti – jie yra elektriškai neutralūs.

Alfa skilimas

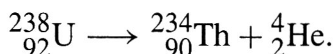
Vykstant α skilimui, branduolys išmeta α dalelę – ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$. Taigi α dalelė yra *helio branduolys.*



Vykstant α skilimui, pirminis branduolys pakinta visų pirma tuo, kad virsta kito cheminio elemento branduoliu (periodinėje elementų sistemoje pasislenka atgal per du langelius). Be dviejų protonų, branduolys netenka dar ir dviejų neutronų.

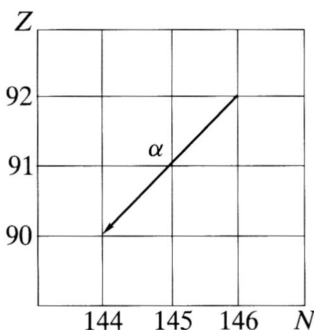
${}^{238}\mathrm{U}$ yra α radioaktyvus. Jam skylant susidaro torio izotopas ${}^{234}\mathrm{Th}$.

Branduolių diagrama vaizduoja šį α skilimą:



$$ {}^{238}_{92}\mathrm{U} \longrightarrow {}^{234}_{90}\mathrm{Th} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}. $$

Atkreipsime dėmesį į tai, jog po reakcijos viršutinių indeksų suma yra 238, o apatinių – 92, taigi nė vienas iš šių skaičių reakcijos metu nepakinta. Tai visai ne atsitiktinumas, nes galioja tokie tvermės dėsniai:
Bet kokiose branduolinėse reakcijose bendras nukleonų skaičius nekinta.
Bet kokiose branduolinėse reakcijose bendras krūvio skaičius nekinta.



Pratimas
Radis ^{226}Ra yra α radioaktyvus. Užrašykite šio skilimo reakcijos lygtį ir pavaizduokite reakciją kaip jau parodyta branduolių diagramoje.



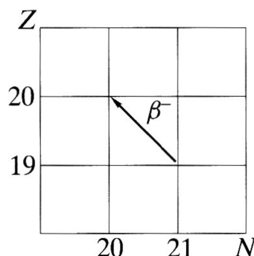
Beta skilimas

Vykstant β skilimui, branduolys išmeta elektroną (β^- dalelę). Elektronas neturi nukleonų, o jo elektrinis krūvis lygus protono krūviui su priešingu ženklu, todėl elektronas žymimas $_{-1}^{0}$e arba e^-.

Vykstant β skilimui, branduolys virsta kito cheminio elemento branduoliu (periodinėje elementų sistemoje pasislenka į priekį per vieną langelį). Atkreipkite dėmesį į tai, kad abu tvermės dėsniai – nukleonų skaičiaus ir krūvio skaičiaus – galioja ir β skilimui.

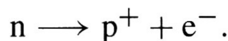
^{40}K yra β^- radioaktyvus. Vykstant skilimui, susidaro ^{40}Ca.
Branduolių diagrama dešinėje vaizduoja šį β^- skilimą:

$$^{40}_{19}\text{K} \longrightarrow {}^{40}_{20}\text{Ca} + {}^{0}_{-1}\text{e}.$$



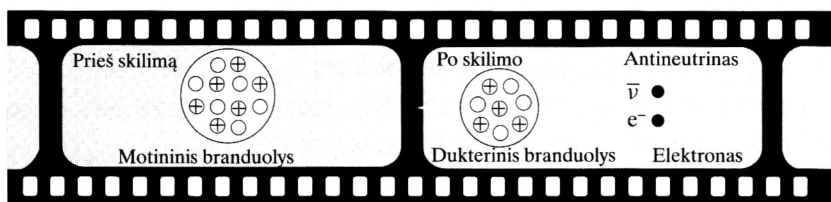
Pratimas
^{19}O yra β^- radioaktyvus. Užrašykite šio β^- skilimo reakcijos lygtį ir pavaizduokite reakciją kaip jau parodyta branduolių diagramoje.

Iš pradžių gali pasirodyti keista, kad branduolys spinduliuoja elektronus – juk atomų elektronai esti *už* branduolio *ribų*. Tai paaiškinama tuo, kad branduolio neutronas virsta protonu, išspinduliuodamas elektroną:



$$n \longrightarrow p^+ + e^-.$$

Iš tikrųjų šio proceso metu, be elektrono, išspinduliuojama dar viena dalelė – vadinamasis antineutrinas ($\bar{\nu}$).

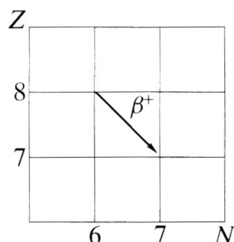


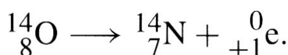
Vykstant β^- skilimui, branduolio neutronas virsta protonu.

Yra ir kitas (truputį rečiau pasitaikantis) β skilimas, kai branduolys išmeta vadinamąjį *pozitroną,* t. y. „teigiamą elektroną". Pozitronas dar vadinamas β^+ dalele ir žymimas e^+, arba tiksliau – ${}^{0}_{+1}e$. Pozitronas ir elektronas turi vienodą masę, o jų elektros krūviai yra tokio pat dydžio, tik priešingų ženklų.

Vykstant β^+ skilimui, branduolys virsta kito cheminio elemento branduoliu (periodinėje elementų sistemoje pasislenka atgal per vieną langelį). Nukleonų skaičiaus bei krūvio skaičiaus tvermės dėsniai galioja ir β^+ skilimui.

Izotopas ${}^{14}O$ yra β^+ radioaktyvus. Vykstant skilimui, susidaro azoto izotopas ${}^{14}N$. Branduolių diagrama piešinyje vaizduoja šį β^+ skilimą:



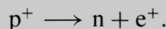


$${}^{14}_{8}O \longrightarrow {}^{14}_{7}N + {}^{0}_{+1}e.$$

Pratimas

${}^{38}K$ yra β^+ radioaktyvus. Užrašykite šio β^+ skilimo reakcijos lygtį ir pavaizduokite reakciją kaip jau parodyta branduolių diagramoje.

Vykstant β^+ skilimui, branduolyje vienas protonas virsta neutronu ir išmetamas pozitronas:



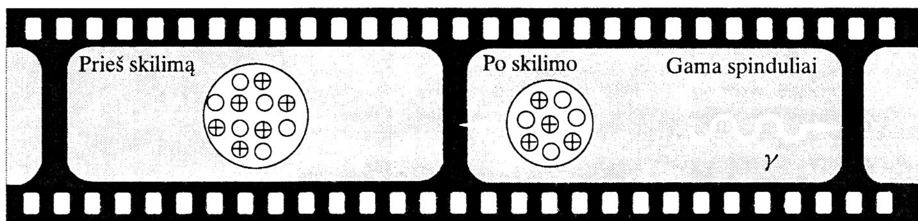
$$p^+ \longrightarrow n + e^+.$$

Be to, šio proceso metu išspinduliuojama dar viena dalelė, vadinamasis *neutrinas* (ν). Neutrinai yra labai neaktyvūs – pavyzdžiui, galima pasakyti, jog iš 1000 milijardų neutrinų srauto, pasiekusio Žemę, maždaug tik 1 sąveikaus su medžiaga Žemėje, visi kiti kaip niekur nieko praeis. Dėl šios aplinkybės registruoti neutrinus ypač sunku. Praėjo 25 metai nuo tada, kai fizikas V. Paulis (*Wolfgang Pauli*), 1930 m. remdamasis teoriniais samprotavimais, numatė neutrino egzistavimą, kol buvo eksperimentiškai pastebėtas. Jų buvimas β skilimo metu atskleidžiamas vien pagal tai, jog akivaizdžiai dingsta tam tikra dalis energijos – būtent ta, kurią nusineša neutrinas. Tokiu būdu β dalelės ir neutrinai pasidalija turimą energiją.

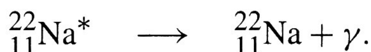
308 309

Gama skilimas

Vykstant γ *skilimui,* branduolys spinduliuoja elektromagnetines labai mažo ilgio bangas (γ spindulius). Spinduliavimo energija atsiranda iš branduolio, kuris spinduliuodamas pereina į žemesnės energijos būseną.



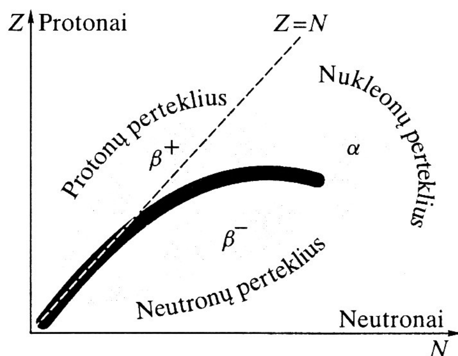
Vykstant γ skilimui, nebūna jokių cheminių elementų virsmų, o tik persiskirsto branduolio nukleonai – jie pasislenka arčiau vienas kito. Pavyzdžiui, ^{22}Na skilimo lygtis yra šitokia:



$$^{22}_{11}\mathrm{Na}^* \longrightarrow {}^{22}_{11}\mathrm{Na} + \gamma.$$

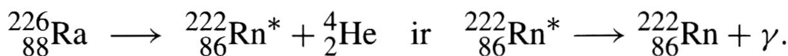
Čia Na* reiškia, jog natrio izotopas yra sužadintas, t. y. aukštesnės energijos būsenos.

Protonai ir neutronai branduolyje gali būti tik tam tikrų energijos būsenų. Vykstant šuoliams tarp branduolio energijos būsenų, išspinduliuojamos arba sugeriamos labai mažų ilgių (esančios toli už regimosios srities ribų) elektromagnetinės bangos – γ spinduliai.



Branduolys gali būti stabilus tik tuomet, kai jį sudaro tinkamas protonų ir neutronų derinys. Be to, nukleonų turi būti ne per daug. Mes aptarėme kylančių dėl stabilumo stokos tris reakcijų tipus: α-spinduliavimą, vykstantį dėl nukleonų pertekliaus, kai branduolys atsikrato 4 nukleonų (2 protonų ir 2 neutronų); β^- spinduliavimą, vykstantį dėl neutronų pertekliaus, kai vienas branduolio neutronas virsta protonu; β^+ spinduliavimą, vykstantį dėl protonų pertekliaus, kai vienas branduolio protonas virsta neutronu.

Ir α, ir β skilimą dažnai lydi γ spinduliavimas. Taip esti dėl to, jog dukterinis branduolys dažnai „gimsta“ ne pagrindinės, o sužadintosios būsenos, ir tik po to, pereidamas į pagrindinę būseną, išspinduliuoja γ spindulius. To pavyzdys – radžio izotopo ^{226}Ra skilimas. Šis izotopas yra α radioaktyvus, jam skylant susidaro sužadintosios būsenos ^{222}Rn. Reakcijų lygtys čia tokios:



$$^{226}_{88}\mathrm{Ra} \longrightarrow {}^{222}_{86}\mathrm{Rn}^* + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \quad \text{ir} \quad {}^{222}_{86}\mathrm{Rn}^* \longrightarrow {}^{222}_{86}\mathrm{Rn} + \gamma.$$

310 311 312 313

3.4. Skilimo dėsnis

Iki šiol visos pastangos paveikti medžiagų radioaktyvųjį spinduliavimą, pavyzdžiui, šildant, šaldant ar spaudžiant, buvo bevaisės. Akivaizdu, kad radioaktyvumas yra visiškai nejautrus išoriniams poveikiams.

Užtat spinduliavimo stiprumas ilgainiui keičiasi: medžiagos spinduliavimas vis silpnėja. Ir tai nenuostabu, nes spinduliuodami radioaktyvieji branduoliai virsta kitų cheminių elementų branduoliais ir tokiu būdu galimų spinduliavimo šaltinių skaičius nuolat mažėja.

Suskilusių, tarkime, per minutę branduolių skaičius visuomet sudaro tam tikrą pastovią viso branduolių skaičiaus dalį. Ta santykinė dalis yra kiekvienos rūšies branduoliams būdinga konstanta.

Kaip pavyzdį panagrinėsime grupę tokių radioaktyvių branduolių, kurių kas minutę suskyla 10%. Jeigu pradėsime nuo 100 milijonų branduolių, tai po minutės jų liks 90 milijonų, o jeigu pradėsime nuo 200 milijonų, tai po minutės liks 180 milijonų. Tačiau kas vyks kitą minutę? Ar nebus likusieji izotopai labiau „pasenę“, t. y. ar nebus jie dabar labiau linkę skilti nei pirmąją minutę? Ne, – „branduoliai neturi atminties“! Išlikę branduoliai antrąją minutę bus lygiai tiek pat linkę skilti kaip ir pirmąją – antrąją minutę taip pat suskils 10% branduolių (ir trečiąją – 10%, ir t. t.). Sakytume, kiekvienas branduolys kaskart meta kauliuką: „skilti ar neskilti?“

Laikas (min.)	0	1	2	3	4
Branduolių skaičius (mln.)	100 200	90 180	81 162	72,9 145,8	65,6 131,2

Dydis, kuris kas minutę (arba kas metus, arba ...) sumažėja tam tikra santykine dalimi, mažėja eksponentiškai (žr. 2 skyrių).

Skilimo dėsnis

Izotopo radioaktyviųjų branduolių skaičius laikui bėgant eksponentiškai mažėja.

Būdingas laikas, per kurį suskyla pusė (50%) branduolių, vadinamas *pusamžiu* arba *puslaikiu* ir žymimas $T_{1/2}$.

Pavyzdys

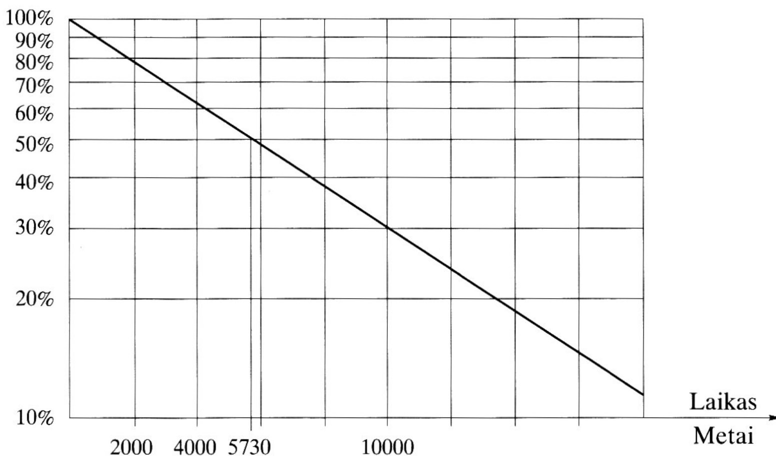
^{24}Na pusamžis (puskiekio konstanta) yra $T_{1/2} = 15$ valandų. Per 15 valandų pradinis branduolių skaičius (sakykime, 3,2 mlrd.) sumažėja iki pusės (iki 1,6 mlrd.). Dar po 15 valandų šis skaičius būna sumažėjęs vėl per pusę (0,8 mlrd.) ir t. t.

Laikas val.	0	15	30	45	60	75
^{24}Na branduolių skaičius mlrd.	3,20	1,60	0,80	0,40	0,20	0,10

Kiekvienos rūšies radioaktyviesiems branduoliams yra būdingas tam tikras pusamžis. Lentelėje pateikta keletas pusamžio pavyzdžių:

Izotopas	^{220}Rn	^{14}C	^{238}U
Pusamžis $T_{1/2}$	55 sekundės	5730 metų	4,5 mlrd. metų

314



Anglies izotopo ^{14}C skilimo kreivė. Išlikusiųjų radioaktyviųjų branduolių kiekio (procentais) priklausomybė nuo laiko. Vertikaliosios ašies skalė logaritminė, o horizontalioji – tiesinė. Tokioje pusiau logaritminėje koordinačių sistemoje skilimo dėsnį nusako tiesė. Iš grafiko, pavyzdžiui, matyti, jog po 3000 metų lieka apie 70% ^{14}C, o 80% suskyla maždaug per 13 300 metų.

Eksperimentas: Radioaktyviojo skilimo modeliavimas

Radioaktyvusis skilimas yra atsitiktinis procesas, todėl galime nusakyti tik *tikimybę*, kad duotasis branduolys per tam tikrą laiko tarpą suskils.

Taigi nors *atskiro* vyksmo trukmę tegalime kvalifikuotai spėti (t. y. nusakyti tam tikrą jo tikimybę), vis dėlto patyrinėjus didesnį skaičių branduolių, išryškėja tam tikri dėsningumai. Vienas jų yra tas, kad skilimas vyksta *eksponentiškai*.

Šiame pratime reikia ištirti, ar visiškai atsitiktinis procesas – būtent kauliukų mėtymas – gali atspindėti eksponentinį skilimo dėsnį.

Kiekvienas mokinys čia atlieka savo dalį bandymo. O bandymas toks – metami *iškart du kauliukai*. „Sėkme“ pavadinsime įvykį, kai *vieno kauliuko atvirs vienas taškas, o kito – du*; visi kiti atvejai laikomi „nesėkme“ (taigi „sėkmės“ tikimybė yra $2/36 = 1/18$). Iš viso kiekvienam šitaip reikės mesti apie 250 kartų.

Meskite kauliukus. Jei atvirto vienas ir du taškai, tarsime, kad skilo branduolys Nr. 1. I lentelėje padėkite kryžiuką. Jei ne, šis branduolys neskilo ir jūs padedate nuliuką. Dabar pasižiūrėkite, ar skyla branduolys Nr. 2, ir padėkite kryžiuką arba nuliuką. Šitaip modeliuokite branduolių Nr. 3, 4, . . . , 30 skilimą.

Išlikę po pirmojo etapo branduoliai tokiu pat būdu išbandomi dar kartą – taigi dabar užpildote antrąją lentelės eilutę. Taip tęskite toliau, kol užpildysite ir 3–12 eilutes.

Konkretumo dėlei tarsime, kad kiekvienas laiko intervalas yra 1 minutė.

Visos klasės rezultatai surašomi į II lentelę. Tokiu būdu greitai gauname daug duomenų, todėl statistiniai rezultatai bus patikimesni. Šitiek duomenų vienas eksperimentuotojas gautų tik per keliskart ilgesnį laikotarpį.

I lentelė

Laiko intervalo t Nr.	Branduolio Nr.										Po t minučių likusių branduolių skaičius (= nuliukų skaičiui)
	1	2	3	4	5	6	...	28	29	30	
1											
2											
3											
...											
11											
12											

II lentelė

Grupės Nr.	Laiko intervalo Nr.					
	1	2	3	...	11	12
1						
2						
3						
...						
Bendras (visos klasės) išlikusių branduolių skaičius						
Kokio išlikusio branduolių skaičiaus N tikėtasi						

Duomenų apdorojimas

1) Pavaizduokite savo rezultatus (I grafikas) ir bendrus visos klasės rezultatus (II grafikas) toje pačioje pusiau logaritminėje koordinačių sistemoje. X ašyje atidedamas laikas t (1 minutei skirkite 1 cm).
2) Kokį dėsningumą galima nustatyti pagal II grafiką? Apskaičiuokite pusamžį. Ar galima jį rasti pagal I grafiką? Pakomentuokite.
3) Kokia tikimybė, kad iš kartu mestų dviejų kauliukų vieno atsivers vienas taškas, kito – du?
4) Kokios visų branduolių dalies kiekvieną laiko tarpą reikia tikėtis skylant?
5) Kokios branduolių dalies kas intervalą reikia tikėtis išliekant?
6) Užpildykite II lentelėje apatinę eilutę. Koks čia augimo daugiklis?
7) Nustatykite formulę, rodančią, kaip išlikusių branduolių skaičius N priklauso nuo praėjusio laiko t.
8) Toje pačioje pusiau logaritminėje koordinačių sistemoje, kurioje nubrėžti I ir II grafikai, nubrėžkite ir III – rastosios priklausomybės grafiką.
9) Remdamiesi šia formule, įsitikinkite, kad eksponentinio augimo 7-ame punkte pusamžis (puskiekio konstanta) yra $T_{1/2} = 12{,}13$ min. Palyginkite tai su pusamžiu, nustatytu pagal II grafiką.

3.5. Aktyvumas

Panagrinėkime radioaktyviosios medžiagos pavyzdį. Kaip jo spinduliavimo intensyvumo matą įvesime vadinamąjį aktyvumą:

$$A = \textit{aktyvumas} = \textit{per sekundę skylančių branduolių skaičiui.}$$

Aktyvumo vienetas vadinamas *bekereliu* (Bq) ir apibrėžiamas šitaip: radioaktyviosios medžiagos pavyzdžio aktyvumas lygus 1 bekereliui, kai jame per 1 sekundę įvyksta 1 skilimas. Pavyzdžiui, Riso salos (Danijoje) atominės elektrinės radioaktyviųjų šaltinių aktyvumas (esant darbo režimui) yra 37 kBq, vadinasi, juose per sekundę įvyksta 37 000 skilimų.

Radioaktyviosios medžiagos aktyvumas A *proporcingas* medžiagos kiekiui, t. y. radioaktyviųjų branduolių skaičiui N – dvigubai daugiau branduolių – dvigubai daugiau ir skilimų, ir t. t. Taigi teisingas toks sąryšis:

$$A = k \cdot N.$$

Šioje lygtyje proporcingumo koeficientas k vadinamas *skilimo konstanta.* Skaičius k – kaip ir pusamžis – yra kiekvienam radioaktyviajam izotopui būdingas dydis. Lentelėse paprastai randame pusamžį, o skaičius

k yra atvirkščiai proporcingas:

$$k = \frac{0,693}{T_{1/2}}.$$

Žinant aktyvumą, iš formulės $A = k \cdot N$ galima rasti likusių branduolių skaičių, ir atvirkščiai – žinant branduolių skaičių, galima rasti aktyvumą. Skaičiuojant k, T matuojamas sekundėmis – tuomet A gaunama bekereliais.

Iš formulės matyti, jog aktyvumas A, kaip ir N, laikui bėgant eksponentiškai mažėja (A juk proporcingas N). A ir N pusamžiai yra tokie pat.

Aktyvumas matuojamas Geigerio skaitikliu. Vis dėlto čia reikėtų atkreipti dėmesį į tai, kad skaitiklis neregistruoja visos spinduliuotės. Pirma, tik dalis jos sklinda išilgai vamzdelio, antra, skaitiklis registruoja tik dalį jį pasiekiančios spinduliuotės. Galima sakyti, kad *skaitiklio rodmenys yra proporcingi aktyvumui.*

Pavyzdys

Seniausiame Danijos reaktoriuje Riso saloje yra 0,983 kg ^{235}U. Raskime jo aktyvumą. Pirmiausia apskaičiuojame jo skilimo konstantą k: ^{235}U pusamžis yra $7{,}04 \cdot 10^8$ metų $= 2{,}22 \cdot 10^{16}$ sekundžių, todėl

$$k = \frac{0,693}{2{,}22 \cdot 10^{16}} = 3,12 \cdot 10^{-17}.$$

Toliau rasime turimų ^{235}U branduolių skaičių:
vieno ^{235}U branduolio masė yra

$$235 \text{ a.m.v.} = 235 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 3{,}90 \cdot 10^{-25} \text{ kg},$$

tad 0,983 kg ^{235}U bus

$$\frac{0{,}983}{3{,}90 \cdot 10^{-25}} = 2{,}52 \cdot 10^{24} \text{ branduolių.}$$

O dabar galime rasti aktyvumą:

$$A = k \cdot N = 3,12 \cdot 10^{-17} \cdot 2{,}52 \cdot 10^{24} \approx 79 \text{ MBq}.$$

Taigi reaktoriuje esančiame urane per sekundę įvyksta 79 milijonai skilimų.

Pavyzdys

Apskaičiuokime 1,0 gramo radžio aktyvumą. Šio izotopo pusamžį – 1600 metų – reikia paversti sekundėmis:

$$T_{1/2} = 1600 \text{ metų} = 1600 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \text{ s} = 5{,}05 \cdot 10^{10} \text{ s},$$

tuomet skilimo konstanta

$$k = \frac{0{,}693}{5{,}05 \cdot 10^{10}} = 1{,}37 \cdot 10^{-11}.$$

^{226}Ra branduolio masė yra 226 a.m.v. = $226 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg = $3{,}75 \cdot 10^{-25}$ kg.
Taigi 1,0 grame ^{226}Ra bus

$$\frac{1{,}00 \cdot 10^{-3}}{3{,}75 \cdot 10^{-25}} = 2{,}67 \cdot 10^{21} \text{ branduolių}.$$

O dabar galime rasti aktyvumą:

$$A = k \cdot N = 1{,}37 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}67 \cdot 10^{21} = 3{,}7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}.$$

Tai, beje, atitinka 1 kiuri (1 Ci) – anksčiau vartotą aktyvumo vienetą –

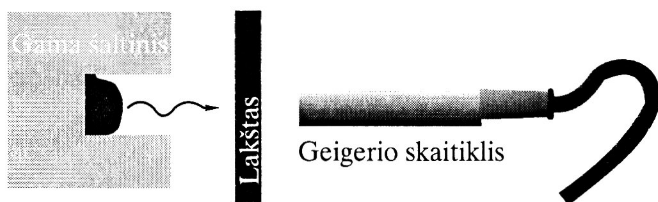
$$1 \text{ kiuris} = 3{,}7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}.$$

315 316 317 318 319

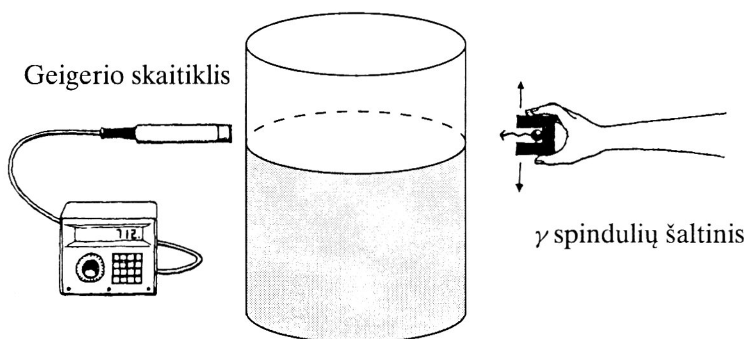
3.6. Praktinis radioaktyvumo taikymas

Keletas taikymo pramonėje atvejų

Gaminant plieno lakštus, jų storį norima kontroliuoti, kol jie dar įkaitę iki raudonumo (o kodėl nebūtų galima palaukti, kol atauš?). Kai tokia temperatūra, su slankmačiu neprieisi. Todėl lakštai praleidžiami tarp radioaktyvaus šaltinio ir detektoriaus – kuo storesnis lakštas, tuo mažiau spindulių pasiekia detektorių. Tada pagal detektoriaus rodmenis galima tiesiogiai spręsti, ar lakštas atitinka reikiamus matmenis. Taip ypač patogu ištirti, ar visas lakštas yra vienodo storio.



Analogiškai kontroliuojamas cigarečių užpildymas, peršviečiant jas išilgai. Dar galima paminėti nepermatomų indų pripildymo lygio matavimą – rūdos lydymo krosnyse, alaus skardinėse ir pan.



Radioaktyvieji izotopai taip pat naudojami neprieinamų vamzdžių (po grindimis suklotų šildymo vamzdžių, dujotiekių, naftotiekių) nesandarumui aptikti. Į vamzdžių sistemą įleidžiama cirkuliuoti tam tikra *indikatorinė medžiaga* (t. y. tam tikros rūšies radioaktyvusis izotopas). Dalis jos prasiskverbia pro nesandarumus (jeigu jų esama), ir iš vamzdžių sistemos tuoj pat išplovus indikatorių, jo lieka tik ten, kur prasiskverbė – ties nesandarumu; šias vietas galima aptikti Geigerio skaitikliu. Kaip indikatorius gali būti naudojamos ^{82}Br, ^{24}Na ar ^{38}Cl druskos.

Keletas taikymo sričių medicinoje

Radioaktyvieji branduoliai naudojami vėžiu sergančių ligonių *spindulinei terapijai.* Gydymas pagrįstas tuo, kad greitai augančias vėžio ląsteles itin lengvai pažeidžia radioaktyvioji spinduliuotė, ir švitinant jos kur kas labiau suardomos nei sveikosios. Gydoma švitinant reikiamas sritis iš išorės (paprastai kobalto ^{60}Co šaltiniu) arba tiesiog į auglį įduriant adatą su radonu.

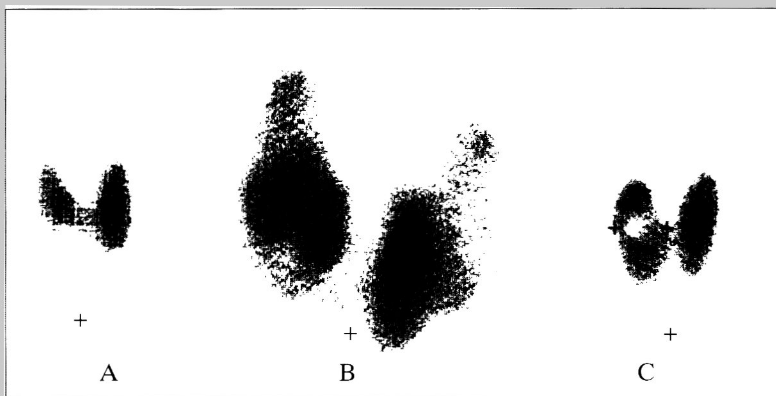
Užrašas $^{99}Tc^m$ reiškia tam tikrą technecio ^{99}Tc branduolio sužadintąją būseną, pasižyminčią itin ilga gyvavimo trukme. Sakoma, kad ši būsena – metastabili, todėl vietoj * rašoma m. Branduolinėje medicinoje technecis ^{99}Tc labai svarbus, nes pasižymi tokiomis savybėmis:

- jo pusamžis yra 6 valandos – pakankamai trumpas, kad gautoji radioaktyvi dozė palyginti greitai išnyktų, bet kartu ir pakankamai ilgas, kad būtų atlikti norimi tyrimai;
- $^{99}Tc^m$ branduolių γ spinduliuotė yra tokios energijos, kad ją lengva registruoti;
- $^{99}Tc^m$ branduoliai yra lengvai prieinami, juos nesunku sujungti su daugeliu gydomųjų priemonių.

Daugelyje ligoninių rytais įjungiamas vadinamasis *generatorius,* kur gaunamas natrio pertechnato tirpalas $NaTcO_4$. Šis skystis dažnai sumaišomas tiesiog su (miltelių pavidalo) atitinkamais medikamentais.

Scintigrafija

Čia matome tris pacientų, išgėrusių $NaTcO_4$ tirpalo, skydliaukių nuotraukas. Radioaktyviuosius $^{99}Tc^m$ branduolius kraujas atneša ir į skydliaukę, kur juos įsisavina *aktyviosios* sritys. Tuomet matuojant įvairių skydliaukės vietų skleidžiamą spinduliuotę, galima susidaryti vaizdą apie šios liaukos dydį bei veikimą.



A. Normalios skydliaukės nuotrauka. Normalus dydis ir tolygus aktyvumo pasiskirstymas.

B. Struma. Tai skydliaukės padidėjimas. Nuotraukoje matyti ne tik padidėjimas, bet ir šiek tiek netolygus aktyvumo pasiskirstymas.

C. Auglys kairėje skiltyje. Auglys pasižymi tuo, kad jis nėra aktyvus, dėl to neįsisavina $^{99}Tc^m$, *ir todėl nespinduliuoja.*

Indikatorių panaudojimo technika

Daugumoje biologinių ir ekologinių procesų gali dalyvauti įvairūs to paties cheminio elemento izotopai. Mat tokių izotopų *cheminės* savybės esti tokios pat, ir gyvieji organizmai juos traktuoja vienodai. Įterpus į organizmą ar ekologinę sistemą nebūdingų jiems izotopų ir po to sekant tokių žymėtųjų branduolių kelią, galima nesunkiai pamatyti tai, ką šiaip aptikti nelengva.

Pažymėjus mineralines trąšas fosforo izotopais ^{32}P, galima tirti tų trąšų efektyvumą – juk žymėtieji fosforo atomai, kaip ir paprastieji, patenka į ekologinės apytakos ratą, ir tuomet augaluose susikaupęs ^{32}P kiekis tiesiogiai rodo, ar tų trąšų druskos pasiekia augalus ir kiek jų pasiekia, ar tik nusėda dirvoje bei gruntiniame vandenyje.

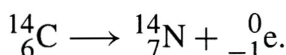
Panašiu metodu (pavyzdžiui, naudojant ^{82}Br) galima nustatyti, kur patenka nutekamieji vandenys.

Kaip kitą pavyzdį galima paminėti metodą, kuriuo nustatoma, kokią dalį medžiagos organizmas įsisavina. Pakeitus kai kuriuos tos medžiagos atomus radioaktyviaisiais izotopais, palyginamas į organizmą patenkančios ir iš jo pašalinamos (per išmatas) medžiagos aktyvumas. Tokiu būdu galima nustatyti, ar ligonio organizmas įsisavina pakankamą kiekį, pavyzdžiui, tam tikro vitamino.

Radioanglies datavimo metodas (^{14}C metodas)

1947 m. buvo atkreiptas dėmesys į tai, kad visuose gyvuosiuose organizmuose yra nedideli kiekiai radioaktyviosios ^{14}C. Per keletą metų buvo sukurtas pirmasis tiesioginis archeologinių radinių datavimo metodas. Pritaikius šį metodą Danijoje, ankstyvasis akmens amžius istorijos skalėje pasistūmėjo 1700 metų atgal, taip pat buvo nustatyta, jog danų kapavietės olose įrengtos maždaug 500 metų anksčiau nei pastatytos didžiosios Egipto piramidės.

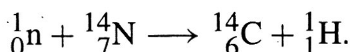
^{14}C metodas grindžiamas tuo, jog visame, kas gyva (bakterijose, augaluose, gyvūnuose), santykis tarp dviejų anglies izotopų – ^{14}C ir ^{12}C – yra toks pat: kiekvienam ^{14}C atomui tenka apie 800 milijardų ^{12}C atomų (žr. 305 užduotį). Augalui ar gyvūnui mirus, radioaktyviosios ^{14}C daugiau nebeįsisavinama, ir ^{14}C kiekis tame organizme ima mažėti:



$$^{14}_{6}C \longrightarrow {}^{14}_{7}N + {}^{0}_{-1}e.$$

Todėl vėliau, išmatavus ^{14}C ir ^{12}C masių santykį, galima nustatyti, kada tas gyvūnas ar augalas miręs (^{12}C izotopas yra stabilus). Juo mažesnis tas santykis, juo ilgesnis bus praėjęs laiko tarpsnis.

Gali pasirodyti keista, kad *gyvuosiuose* organizmuose šis masių santykis yra pastovus, kai ^{14}C izotopas visą laiką nyksta, virsdamas azotu ^{14}N. Tai paaiškinama šitaip: atmosferoje esantis ^{14}C kiekis visą laiką pasipildo vykstant didelių energijų procesams, kuriuos sukelia nuolat patenkančios kosminės dalelės. Viena iš svarbiausių tokių reakcijų, kurių metu susidaro anglis ^{14}C, yra šitokia:



$$^{1}_{0}n + ^{14}_{7}N \longrightarrow ^{14}_{6}C + ^{1}_{1}H.$$

Tarp tokios ^{14}C gamybos ir tuo pat metu vykstančio skilimo nusistovi pusiausvyra, ir atmosferoje esantis ^{14}C išlieka stabilus. Žymėtoji yra visų pirma tam tikra pastovi dalis orą sudarančių CO_2 molekulių.

Tas pastovus atmosferos ^{14}C ir ^{12}C kiekio santykis, kaip minėta, įsivyrauja ir visuose *gyvuosiuose* augaluose, gyvūnuose bei žmoguje. Au-

^{14}C metodu nustatomo amžiaus pataisos kreivė. Tikrasis amžius nustatomas tokiu būdu. Išmatavus amžių ^{14}C metodu, nuo x ašyje gauto rezultato kylama į viršų iki kreivės, ir tada ieškoma to taško ordinatė. Gautoji reikšmė y ašyje ir yra tikrasis amžius.

galuose taip yra dėl to, jog jie iš oro nuolat ima anglies dioksidą (fotosintezė), o gyvūnuose bei žmoguje tai nusistovi per mitybos grandinę. (Vykstant fotosintezei, augalai iš oro ima anglies dioksidą bei vandens garus ir, kaip energijos šaltinį panaudodami saulės šviesą, gamina angliavandenį ir deguonį.)

Organinės kilmės medžiagų (medienos, durpių, kaulų), paimtų, pavyzdžiui, iš gyvenviečių ar kapaviečių, amžius ^{14}C metodu nustatomas chemiškai analizuojant anglies dioksidą, gautą iš tiriamojo objekto dažniausiai sudeginus tam tikrą anglies kiekį (paprastai 5 gramus). Tuomet išmatuojamas tos išskirtosios medžiagos radioaktyvumas, ir gautieji duomenys pažymimi x_1. Toliau pamatuojamas atitinkamas kiekis anglies, gautos iš atitinkamos *šviežios* organinės medžiagos, ir šie duomenys pažymimi x_2. Jei visą šį laikotarpį ^{14}C ir ^{12}C kiekio santykis atmosferoje buvo vienodas, tai x_2 yra tiksliai tas skaičius, kokį būtume gavę, išmatavę tiriamąjį objektą jam tik mirus. Vadinasi, santykis x_1/x_2 reiškia likusiąją pradinio kiekio ^{14}C dalį. O tuomet ieškomąjį laikotarpį galima rasti grafike 242 puslapyje.

Pirminė ^{14}C metodo formuluotė buvo pagrįsta prielaida, kad ^{14}C kiekis atmosferoje – o kartu ir augalinėje bei gyvulinėje medžiagoje – visais laikais buvęs vienodas. Ši prielaida pasirodė esanti ne visai teisinga, ir todėl ^{14}C metodu nustatomą amžių teko pakoreguoti. Korekciją galima atlikti pagal grafiką. Ši kreivė nubrėžta lyginant ^{14}C metodu rastąjį amžių su kitais būdais nustatytu amžiumi.

Panagrinėjus grafiką matyti, jog laikotarpiams, mažesniems nei 2500 m., pataisa yra palyginti nežymi, tačiau didesniems laikotarpiams ^{14}C metodu rasto amžiaus nukrypimas nuo tikrojo vis didėja. Pataisa 7000 m. amžiui yra net 800 metų! Dar senesniems objektams pataisa vėl nedidelė.

^{14}C metodu galima nustatyti amžių iki 5000 metų. Senesnių objektų ^{14}C aktyvumas esti toks mažas, kad jo jau nebeįmanoma pakankamai tiksliai užregistruoti.

Pavaizduotoji pataisos kreivė iš esmės buvo gauta išstudijavus vieno iš seniausių gyvųjų organizmų Žemėje – mamutmedžio metines rieves. Kalifornijoje buvo rastas šios genties medis – sekvoja, kuri pasirodė turinti daugiau nei 5000 metų. Kiekvienais šio laikotarpio metais vis priaugdavo po rievę. Buvo galima atsipjauti ir ^{14}C metodu nustatyti jos amžių (visa laimė, kad vidinė medžio dalis nesikeičia anglimi su aplinka). Tokiu būdu ^{14}C metodu gautą amžių galima palyginti su tikruoju. ^{14}C kiekio atmosferoje svyravimai nepriklauso nuo vietovės geografinės padėties, ir kaliforniškoji kreivė praktiškai tinka visam Žemės rutuliui.



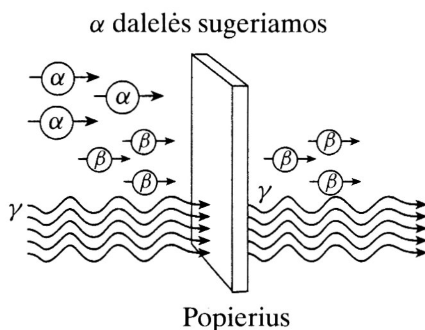
Vienas seniausių gyvųjų organizmų Žemėje – Kalifornijos mamutmedis.

320 321 322 323 324

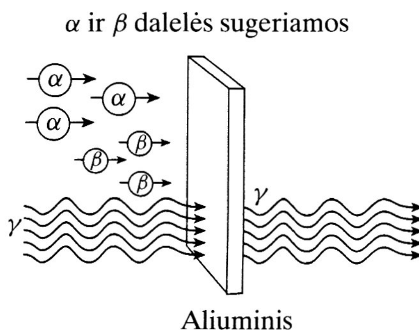
3.7. Radioaktyviosios spinduliuotės sugertis

Trys radioaktyviųjų spindulių tipai – α, β ir γ – pasižymi labai skirtingu skvarbumu.

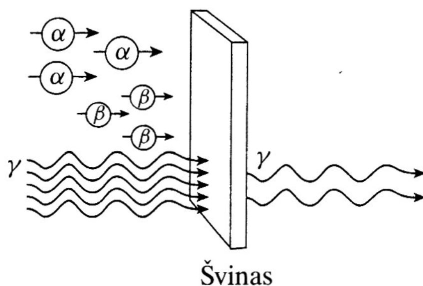
α *dałeles* sustabdyti nesunku – tam pakanka 1 mm sluoksnio kietosios medžiagos ar skysčio. Ore jų lėkio nuotolis taip pat nedidelis (vos keletas centimetrų). Iš to būtų galima padaryti klaidingą išvadą, kad α spinduliai žmogui nepavojingi – juk tiesioginiai α dalelių srautai pakeliui iš šaltinio į „taikinį“ visuomet būsią sustabdyti oro ar kokios kitos medžiagos. Iš tikrųjų yra kitaip: α dalelių šaltiniai – α radioaktyvūs izotopai – per maistą ar įkvepiamą orą gali patekti į organizmą ir, būdami visai šalia ląstelių, padaryti joms daug žalos.



β spinduliavimo elektronus sulaiko 1 cm storio metalinė plokštė. Lėkio nuotolis ore vis dėlto siekia keletą metrų.



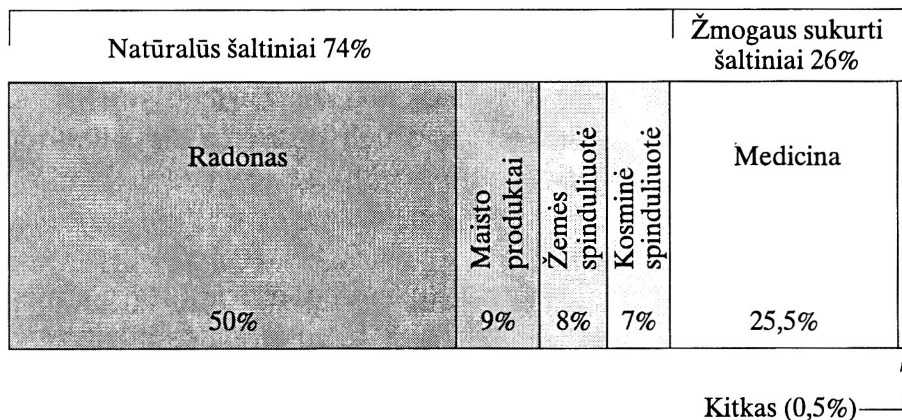
γ spinduliai yra patys skvarbiausi iš visų radioaktyviosios spinduliuotės tipų. Norint juos ekranuoti, reikia storo betono ar švino sluoksnio. Ore γ spindulius galima aptikti iki kelių šimtų metrų atstumu nuo šaltinio (tai dar priklauso ir nuo spinduliuotės energijos).



325 326 327

3.8. Spinduliuotė

Žemiau parodyta, iš ko susidaro vidutinio dano 1995 metais gauta apšvitos dozė.



Kaip matyti iš diagramos, pusė mus apšvitinančios spinduliuotės kyla iš *radono*. Radono, kaip chemiškai neaktyvių dujų, pirmiausia yra atmosferos ore, tačiau jis tirpsta ir vandenyje. Radioaktyvieji radono izotopai susidaro skylant radžiui (α skilimas), o radžio yra (ir visuomet buvo) mus supančioje aplinkoje, ypač – žemėje. Didžioji dalis pastatuose esančio radono atsiranda iš žemės po pastatais – iš čia jis kyla skverbdamasis pro pamato, rūsio grindų bei išorinių sienų plyšius ir įtrūkimus. Radžio įvairūs kiekiai esti ir statybinėse medžiagose, kaip antai betone, čerpėse, keramikos dirbiniuose, gipse.

Radonas ir jo skilimo produktai kaupiasi ore esančiose dulkelėse ir lašeliuose. Įkvėpus jų, radono atomų gali patekti į plaučius, ir dalis jų prikibę likti bei spinduliuoti. Nustatyta, jog ilgalaikis ir stiprus radono spinduliavimas gali sukelti plaučių vėžį (ypač rūkaliams).

Ore radono visuomet yra daugiau patalpose nei lauke, ir ypač – remiantis tuo, kas čia buvo pasakyta – arti žemės esančiose patalpose. Tokiu būdu paprastas ir efektyvus būdas sumažinti radono kiekį patalpose – gerai vėdinti patalpas.

Radono kiekis ore nusakomas vienetais Bq/m^3 (bekereliai kubiniame metre). Pavyzdžiui, radono ir jo skilimo produktų kiekis Danijoje yra apie 8 Bq/m^3. Tai reiškia, jog kubiniame metre oro kiekvieną sekundę skyla 8 radono branduoliai. Vidutinis radono kiekis danų būstuose yra

apie 50 Bq/m^3 (daugiaaukščiuose – 20 Bq/m^3, nedideliuose vienaukščiuose – 70 Bq/m^3). Švedų būstuose šis vidurkis yra dvigubai didesnis – 100 Bq/m^3. Švedijoje apie 40 000 vienaukščių namų radono kiekis netgi viršija 800 Bq/m^3. Pensilvanijos (JAV) vienaukščiuose namuose išmatuotas radono kiekis buvo 100 000 Bq/m^3.

Po radono daugiausia radioaktyviosios apšvitos, būtent 25,5% – sukelia *medicinos tyrimai.* Pirmiausia tai rentgenodiagnostika, taip pat ir radioaktyviųjų izotopų taikymas įvairiausiems tyrimams bei gydymui. Kaip ir apskritai bet kokio gydymo atveju, reikia kruopščiai pamatuoti, koks bus santykis tarp gydymo šalutinio poveikio ir laukiamo efekto. Labai apytiksliai galima tarti, jog savo metinei apšvitos dozei gauti pakanka vos vienos rentgeno nuotraukos.

9% *maisto produktų* radioaktyviosios apšvitos atsiranda visų pirma dėl gamtoje natūraliai esančių izotopų kalio ^{40}K, anglies ^{14}C ir švino ^{210}Pb. ^{40}K sudaro 0,0118% gamtoje sutinkamo kalio, o ^{14}C – $1{,}25 \cdot 10^{-10}$% gamtoje sutinkamos anglies. Tačiau nepaisant tokio milžiniško dalių skirtumo, gyvajame organizme dėl ^{40}K ir dėl ^{14}C kyla bemaž vienodas skilimų skaičius – apie 60 Bq/kg (žr. 318 ir 319 užduotis). Ir vis dėlto ^{40}K čia yra reikšmingesnis spinduliuotės šaltinis, nes skildamas jis spinduliuoja apie 10 kartų didesnės energijos elektronus nei ^{14}C.

8% *Žemės spinduliuotės* kyla iš Žemės plutos ir iš statybos medžiagų. Žemės plutos spinduliuotės stiprumas, savaime suprantama, įvairiose vietose skirtingas. Pavyzdžiui, Bornholmo salos gyventojai gauna triskart didesnę dozę nei vakarų Jutlandijos gyventojai. Taip pat galima pasakyti, kad betonas skleidžia kur kas daugiau γ spindulių nei, pavyzdžiui, medis.

7% tenka *kosminiams spinduliams.* Tai didelės energijos dalelių srautas, visą laiką veikiantis Žemę. Juo aukščiau kilsime, juo ši spinduliuotė stipresnė. Pavyzdžiui, skrendant lėktuvu iš Kopenhagos į Niujorką ir atgal, gaunama tokia pat apšvitos dozė kaip iš žemės per visus metus.

Apie kategoriją *„kitkas“* (0,5%), nepaisant jos menkumo, girdime daugiausia. Ji apima įvairių prietaisų skleidžiamą spinduliuotę (televizorių, laikrodžių, gaisro signalizacijos įtaisų ir t. t.), radioaktyviąsias nuosėdas, iškrintančias po branduolinio ginklo bandomųjų sprogdinimų ar branduolinių reaktorių avarijų. Vadinamosios *globalinės nuosėdos*, t. y. atominių bombų sprogdinimų pasekmė, nūnai atsiranda daugiausia dėl Kinijos ir Prancūzijos bandomųjų sprogdinimų atmosferoje. JAV ir tuometinė Sovietų Sąjunga sprogdinimus atmosferoje 1963 m. nutraukė. O jei būtų tęsusios, tai globalinės nuosėdos, kaip manoma, šiandien būtų apie 20 kartų didesnės.

Sprogstant atominei bombai, susidaro daugybė radioaktyviųjų branduolių, kurie prikimba prie dulkių bei vandens lašelių ir taip susidaro radioaktyvus debesis. Debesį išsklaido vėjas, o jo dalelės ilgainiui nusėda įvairiose Žemės vietose, kur tie radioaktyvieji branduoliai po valandos, savaitės ar metų (priklausomai nuo pusamžio) skyla.

Trumpai aptarsime tris iš tokiu būdu susidarančių izotopų: stroncį ^{90}Sr, cezį ^{137}Cs ir jodą ^{131}I. Be šių trijų, svarbų vaidmenį vaidina dar ir ^{3}H bei ^{14}C. Tai, kas čia bus pasakyta, tinka ir iš atominių elektrinių į atmosferą patenkančioms radioaktyviosioms medžiagoms.

Stroncis periodinėje elementų sistemoje yra toje pačioje pagrindinėje grupėje kaip ir kalcis, todėl šios dvi medžiagos iki tam tikros ribos chemiškai reaguoja vienodai. Pavyzdžiui, mitybos grandinėje kalcis ir stroncis keliauja tais pačiais keliais. O kurgi keliauja kalcis? Kalkių ($CaCO_3$) pavidalu jis atsiduria mūsų kauluose. Vadinasi, kauluose kaupiasi ir radioaktyvusis stroncis ^{90}Sr, kuris ir čia spinduliuoja. Taigi spinduliuotės šaltiniai įsiskverbia net į patį mūsų organizmą! Kaulų čiulpuose gaminami raudonieji kraujo kūneliai, todėl turint galvoje tai, kas čia buvo pasakyta, visai nenuostabu, kad Hirosimoje ir Nagasakyje susirgimų, pavyzdžiui, kraujo vėžiu (leukemija) po 1945 m. ūmai padaugėjo (apie 15 kartų). Beje, M. Kiuri mirė taip pat nuo leukemijos (1934). Viena iš priežasčių, kodėl JAV ir Sovietų Sąjunga nutraukė bandomuosius sprogdinimus atmosferoje, buvo ta, kad nuo 1950 m. visame pasaulyje buvo aiškiai pastebimas vis didėjantis ^{90}Sr kiekis žmonių ir gyvūnų organizmuose.

Cezis periodinėje elementų sistemoje yra toje pačioje grupėje kaip ir kalis. Vadinasi, radioaktyvūs cezio ^{137}Cs branduoliai mitybos grandinėse kartais gali pakeisti kalio branduolius, pavyzdžiui, tokiose, kaip

dumbliai ⟶ žuvys ⟶ žuvies filė

arba

žolė ⟶ karvė ⟶ pienas.

Po Černobylio avarijos 1986 m. Danijoje iškrito apie 1000 Bq/m^2 radioaktyviųjų cezio nuosėdų (Lietuvoje – nuo 3000 iki 20 000 Bq/m^2).

Jodas ^{131}I yra trečias svarbus globalinių nuosėdų izotopas. Šis izotopas per augalus patenka į mitybos grandinę ir kaupiasi žmogaus organizme – skydliaukėje, kur laikosi kaip nuolatinis vidinis spinduliuotės

šaltinis. Padaugėjus radioaktyviųjų nuosėdų (po branduolinių reaktorių avarijų ir pan.), vartojant jodo tabletes galima, taip sakant, prisotinti skydliaukę neradioaktyviuoju jodu, ir tokiu būdu užkirsti kelią nepageidaujamų radioaktyviųjų jodo branduolių įsisavinimui.

Beje, atkreipkite dėmesį į tai, kad apšvitinimo diagramoje 81 puslapyje visai nėra atskiros atominių elektrinių dalies. Taip yra dėl to, jog jų poveikis labai mažas (daugiau nei 200 kartų mažesnis už neišvengiamus kosminius spindulius). Netgi tuose kraštuose, kur yra daug veikiančių atominių elektrinių (pavyzdžiui, JAV), bendros foninės spinduliuotės padidėjimas prietaisais nepastebimas.

328

3.9. Biologinis jonizuojančiosios spinduliuotės poveikis

Štai kodėl tai pavojinga

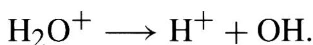
Besiskverbdami pro medžiagą, radioaktyvieji spinduliai susiduria su medžiagos atomų elektronais ir atiduoda jiems dalį savo energijos. Dėl to medžiagos atomai gali visiškai netekti kai kurių savo elektronų – taip susidaro jonai. Dėl šios priežasties radioaktyvioji spinduliuotė vadinama *jonizuojančiąja spinduliuote.* Šis apibūdinimas taikomas ir kitiems jonizaciją sukeliantiems spinduliams (pavyzdžiui, Rentgeno).

Didelė dalis jonizacijos gyvuosiuose audiniuose tenka vandens molekulėms:



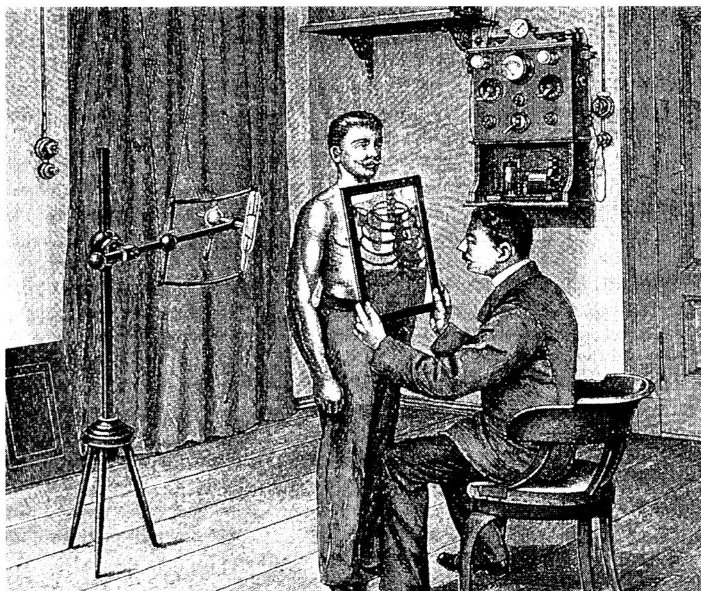
$$H_2O + \text{jonizuojantieji spinduliai} \longrightarrow H_2O^+ + e^-.$$

Šis susidaręs jonas nėra stabilus ir greitai suyra:



$$H_2O^+ \longrightarrow H^+ + OH.$$

OH yra itin aktyvus, kadangi iki inertinių dujų struktūros jo jungtyje trūksta vieno elektrono. Tokiu būdu vandens molekulių jonizacijos rezultatas – susidarę chemiškai labai aktyvūs junginiai, galintys paveikti ar visai sutrikdyti gyvybiškai svarbias ląstelių funkcijas.



Šis 1903 m. piešinys rodo, kad ne visada į Rentgeno spindulių žalą buvo žiūrima taip rimtai. Spinduliai, sklindantys iš už paciento esančio Rentgeno vamzdžio, prasiskverbia pro kūną, tačiau yra sulaikomi kaulų. Fluorescuojančiame ekrane, kaip parodyta, galima tiesiogiai matyti skeleto vaizdą.

Vis dėlto jonizuojančioji spinduliuotė gali ir tiesiogiai pažeisti ląstelių makromolekules (pavyzdžiui, DNR). Tai yra itin pavojinga, nes DNR molekulėse sukaupta ląstelių paveldo informacija, ir nutraukus vos keletą iš tų tūkstančių cheminių jungčių, laikančių sudėtingą molekulių struktūrą, paveldo mechanizmas gali pakisti. Dalijantis ląstelėms, tas pažeidimas perduodamas daugybei dukterinių ląstelių ir išplinta.

Kiek gali pakelti žmogus?

Biologiškai žalingą radioaktyviosios spinduliuotės poveikį galima įvertinti kiekybiškai. Tai daroma šitaip.

Iš pradžių apskaičiuojama ar išmatuojama, kiek energijos (džauliais) spinduliuotė atidavė tiriamajam organui (pavyzdžiui, kepenims). Po to apskaičiuojama, kiek tos energijos tenka 1 kilogramui, t. y. energijos kiekis dalijamas iš organo masės. Gautasis dydis D vadinamas *sugerties doze* ir matuojamas džauliais/kg, arba – grėjais (Gy).

Esant vienodoms sąlygoms, α spinduliai yra kur kas pavojingesni nei β, γ ar Rentgeno spinduliai. Sugerties dozė grėjais dar ne viską pasako apie spinduliuotės biologinį poveikį, todėl sugerties dozė padauginama

iš vadinamojo *jautrumo koeficiento*. Taip gaunama *efektinė apšvitinimo dozė* H:

$$H = Q \cdot D.$$

Spinduliuotės tipas	β, γ ir Rentgeno spinduliai	Protonai ir neutronai	α spinduliai
Jautrumo koeficientas Q	1	10	20

Taigi jei yra α spinduliai, tai norint gauti jų efektinę dozę, dozę D (grėjais) reikia padauginti iš 20. Efektinė dozė H matuojama zyvertais (sutrumpintai – Sv) ir yra apibrėžta tik nedidelėms dozėms. Efektinė dozė H dar vadinama *apšvitinimo ekvivalentu.*

Apskaičiuota, kad per metus kiekvienas danas vidutiniškai gauna 4 milizyvertus (mSv). Būtent šių 4 mSv santykinis pasiskirstymas pagal įvairius spinduliuotės šaltinius ir buvo pateiktas 81 puslapyje. Pavyzdžiui, maisto produktų 9% atitinka $4\ \text{mSv} \cdot 0{,}09 = 0{,}36$ mSv per metus. Palyginimui galima pasakyti, jog per pirmuosius metus po Černobylio avarijos jos sukeltos spinduliuotės dozė Danijoje buvo apie 0,02 mSv. Jau 1990 m. šis skaičius sumažėjo iki maždaug 0,003 mSv.

6000 mGy visam organizmui yra mirtina apšvitinimo dozė, nes tuomet sutrinka kraujo kūnelius gaminančių kaulų čiulpų veikla. Gavus 1000 mGy, atsiranda ryškūs spindulinės ligos požymiai (pykinimas, viduriavimas, plaukų slinkimas, gleivinės uždegimai).

Pavyzdys

70 kg sveriančiame žmoguje – dėl to, jog žmogaus organizme natūraliai esti kalio izotopo ^{40}K – per sekundę įvyksta apie 4400 β skilimų (žr. 319 užduotį). Žinoma, kad vieno tokio skilimo metu vidutiniškai išsiskiria $7{,}5 \cdot 10^{-14}$ J energijos, ir galime padaryti prielaidą, kad β dalelės yra visiškai sugeriamos jas supančio audinio. Vadinasi, per sekundę visas organizmas gauna

$$4400 \cdot 7{,}5 \cdot 10^{-14}\,\text{J} = 3{,}3 \cdot 10^{-10}\,\text{J}.$$

Per metus susidaro

$$3{,}3 \cdot 10^{-10}\,\text{J} \cdot (60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365) = 0{,}0104\ \text{J}.$$

Galiausiai randame metinę efektinę dozę:

$$H = 1 \cdot \frac{0{,}0104}{70\ \text{kg}} = 0{,}00015\ \text{Sv} = 0{,}15\ \text{mSv}.$$

Palyginus tai su jau minėtais 0,36 mSv, matyti, jog maždaug pusę viso šio iš maisto produktų tenkančio švitinimo gauname dėl ^{40}K skilimo.

329 330

Mažos efektinės dozės (mažesnės nei 500 mSv), regis, neturi tuoj pat pasireiškiančio poveikio. Tačiau silpna jonizacija vis dėlto gali paskatinti procesus, kurių poveikis gali išryškėti tik po valandų, savaičių ar metų (pykinimas, viduriavimas, priešlaikinis gimdymas, vėžys, vaikų apsigimimai ir kt.).

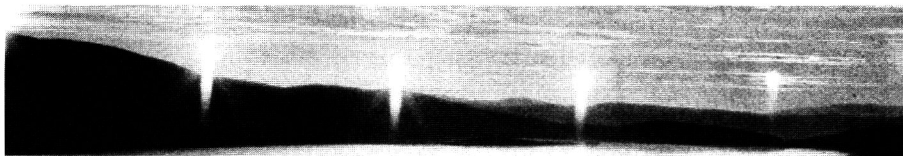
Neaišku, koks yra silpnos ir ilgalaikės apšvitos poveikis organizmui. Ar egzistuoja tokia spinduliuotės stiprumo riba, iki kurios ląstelės, taip sakant, dar sugeba atsistatyti? O gal priešingai – žalingas poveikis kaupiasi, kol galiausiai tampa grėsmingas? Atsakymų į šiuos klausimus nėra. Mat labai sunku rasti dideles izoliuotas gyventojų grupes, kurias būtų galima tarpusavyje palyginti. Todėl neįmanoma atsakyti į tokius klausimus: „ar yra Vilniuje bent vienas susirgimo leukemija dėl Ignalinos AE atvejis?“, „ar televizorių ekranų spinduliavimas nekelia vėžio pavojaus?“ (natūrali vėžio tikimybė yra apie 22%).

Kalbant apie *didesnes dozes*, jų poveikis matyti iš vadinamosios *spindulinės ligos* simptomų – plaukų slinkimo, kraujavimo ir infekcijų, galinčių sukelti ankstyvą mirtį.

Dabar priimti ir seniau vartoti aktyvumo bei apšvitos dozių vienetai

Dydis	Vienetas	Santrumpa	Seniau vartotas vienetas	Santykis su dabar vartojamu vienetu
Aktyvumas A	bekerelis	Bq	Ci = kiuri	$1\ \text{Ci} = 3{,}7 \cdot 10^{10}\ \text{Bq}$
Energija vienam kilogramui = sugerties dozė D	grėjus	Gy	radas	1 rad = 0,01 Gy
Efektinė dozė H	zyvertas	Sv	remas	1 rem = 0,01 Sv

4. Branduolio energija





Vidurnakčio saulė. Nespėjus jai pasislėpti už kalnų, prasideda nauja diena, ir saulė vėl pateka. Atomų branduolių reakcijos Saulėje yra svarbiausias mūsų energijos šaltinis. Saulės amžius – maždaug 4,6 milijardo metų.

Pirmojoje knygos dalyje nagrinėjome nemažai fizinių ir cheminių procesų, lydimų energijos virsmų, t. y. tokių procesų, kurių metu vienos rūšies energija virsdavo kita, pavyzdžiui, cheminė – šilumine. Vienais atvejais buvo kalbama apie medžiagas, pereinančias iš vienos būsenos į kitą (lydymasis, kietėjimas, garavimas, kondensacija), kitais – apie medžiagas, besijungiančias viena su kita (pavyzdžiui, degimo reakcija).

Visų šių procesų bendras požymis – vykstančius energijos virsmus lemia ryšių tarp molekulių ir atomų kitimas. Panašiai esti ir su branduoliniais procesais – energijos virsmai čia vyksta dėl ryšių tarp branduolius sudarančių dalelių, t. y. tarp protonų ir neutronų, pokyčių.

4.1. Masė ir energija

Pagal A. Einšteino (*Albert Einstein*) reliatyvumo teoriją, tarp kūno reliatyvistinės masės m (matuojamos kilogramais) ir jo pilnutinės energijos E (matuojamos džauliais) yra glaudus ryšys. Šio ryšio išraiška – garsioji Einšteino formulė:

$$E = m \cdot c^2.$$

Čia c reiškia šviesos greitį – $3{,}0 \cdot 10^8$ m/s. Kadangi c yra toks didelis skaičius, tai menką medžiagos kiekį (1 kilogramą) atitinka didžiulis energijos kiekis:

$$1{,}0 \cdot \left(3{,}0 \cdot 10^8\right)^2 \text{ džaulių} = 9{,}0 \cdot 10^{16} \text{ džaulių}.$$

Viename kilograme medžiagos (pavyzdžiui, 1 kg žemės) sukaupto pilnutinės energijos kiekio pakaktų patenkinti visos Lietuvos poros mėnesių poreikius; tik, deja, tą turimą energiją ne taip paprasta išgauti. Sudeginus 1 kg naftos, išsiskiria apie 30 MJ energijos – taigi 1 kilograme medžiagos sukauptos energijos kiekis yra maždaug 3 milijardus kartų didesnis už cheminės energijos kiekį, išskiriamą degimo metu. Norint panaudoti tokią medžiagoje slypinčią energiją, reikia nutraukti ryšius, daug stipresnius už chemines jungtis. Tai ir yra atomų branduoliniai ryšiai.

Čia reikia pastebėti, jog bet koks kūno energijos pokytis reiškia ir atitinkamą masės pokytį. Jeigu, pavyzdžiui, šildydami kūnui suteikiame energijos, tai padidiname ir jo masę.

Rimties masė

Pagal Einšteiną, didėjant kūno greičiui, jo masė auga. Jei suteikiame kūnui greitį, tai jo masė padidėja proporcingai įgytai kinetinei energijai. Reliatyvistiniuose energijos virsmų skaičiavimuose pilnutinė kūno energija E skiriama į vidinę energiją E_{vid} ir kinetinę energiją E_{kin}:

$$E = E_{\text{vid}} + E_{\text{kin}}.$$

Atitinkamai ir kūno pilnutinė masė m skiriama į rimties masę m_0 (t. y. tą masę, kurią galima nustatyti pasvėrus kūną), ir masės prieaugį m_{kin}, sąlygotą kūno judėjimo:

$$m = m_0 + m_{\text{kin}}.$$

Vykstant bet kokiems procesams, bendras pilnutinės energijos ir pilnutinės masės kiekis nekinta, tačiau vienos rūšies energija gali virsti kitos rūšies energija. Nauja čia yra tai, kad reikia atsižvelgti ir į masę. Vykstant branduolinėms reakcijoms, vidinė energija gali virsti kinetine, o tai atitinka rimties masės virsmą – išsiskiriant kinetinei ar spinduliuotės energijai, visuomet bus atitinkamai prarandama rimties masės. Pavyzdžiui, spinduliuodama energiją, Saulė netenka rimties masės – vykstant Saulėje branduolinėms reakcijoms, kiekvieną sekundę daugybė tonų jos rimties masės virsta spinduliuotės energija.

Toliau skaičiuodami branduolinėse reakcijose vykstančius masės pokyčius, visuomet turėsime galvoje, jog turime reikalą su rimties masėmis.

401 402 403

Energijos ir masės vienetai branduolio fizikoje

Kaip minėta 3-iame skyriuje, branduolio fizikoje vartojamas masės vienetas yra a.m.v. (atominis masės vienetas). Nustatyta, kad

$$1 \text{ a.m.v.} = 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}, \qquad 1 \text{ kg} = 6{,}02 \cdot 10^{26} \text{ a.m.v.}$$

Branduoliniuose procesuose patogu naudotis energijos vienetu pikodžauliu (pJ):

$$1 \text{ pJ} = 10^{-12} \text{ J}.$$

Pagal Einšteino formulę, 1 a.m.v. atitiks 149 pJ energijos:

$$E = mc^2 = 1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot \left(3,0 \cdot 10^8\right)^2 \text{ J} = 149 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 149 \text{ pJ}.$$

Dar sykį užrašysime šias skaitines vertes:

$$1 \text{ a.m.v.} = 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 149 \text{ pJ energijos}.$$

Branduolio fizikoje dar vartojamas vienetas MeV (megaelektronvoltas):

$$1 \text{ MeV} = 0,160 \text{ pJ}.$$

1 a.m.v. masė atitinka 931,5 MeV ($931,5 \cdot 0,160$ pJ $= 149$ pJ).

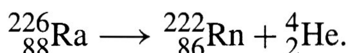
404 405 406

Kai kurių branduolių rimties masės

Z	*A*	Simbolis	Masė	*Z*	*A*	Simbolis	Masė	*Z*	*A*	Simbolis	Masė
−1	0	e^-	0,000549	4	7	Be	7,0147	36	91	Kr	90,9036
0	1	n	1,008665	6	12	C	11,9967	38	90	Sr	89,8869
1	0	e^+	0,000549	6	13	C	13,0001	39	90	Y	89,8858
1	1	H (p)	1,007276	6	14	C	14,0000	46	119	Pd	118,9034
1	2	H (D)	2,0136	7	14	N	13,9992	56	143	Ba	142,8898
1	3	H (T)	3,0155	8	16	O	15,9905	84	218	Po	217,9629
2	3	He	3,0149	8	17	O	16,9947	86	222	Rn	221,9704
2	4	He	4,0015	10	20	Ne	19,9870	88	226	Ra	225,9771
3	6	Li	6,0135	19	40	K	39,9536	90	234	Th	233,9942
3	7	Li	7,0144	26	56	Fe	55,9207	92	235	U	234,9935
								92	238	U	238,0003

Energijos išsiskyrimas

Panagrinėkime, pavyzdžiui, α skilimą (plg. 64 p.):



$$^{226}_{88}\mathrm{Ra} \longrightarrow {}^{222}_{86}\mathrm{Rn} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

Kai radžio branduolys virsta radono bei helio branduoliu – α dalele, ši išmetama didžiuliu greičiu. Reakcijos metu išsiskiria kinetinė energija (kurios daugiausia tenka α dalelei). Vadinasi, reakcijoje atitinkamai turi būti prarasta rimties masės. Iš jau pateiktos lentelės randame branduolių rimties mases ir apskaičiuojame išsiskiriančią energiją.

Prieš tai buvusi rimties masė:		Rimties masė po reakcijos:	
^{226}Ra	225,977 a.m.v.	^{4}He	4,0015 a.m.v.
		^{222}Rn	221,9704 a.m.v.
			225,9719 a.m.v.

Taigi prarandama $225,9771$ a.m.v.$-225,9719$ a.m.v. $= 0,0052$ a.m.v. masės. Tai atitiks $0,0052 \times 149$ pJ $= 0,77$ pJ energiją. Tai reiškia, kad

skilus vienam radžio branduoliui, išsiskiria 0,77 pJ energijos. Ši energija virsta α dalelės ir radono branduolio kinetine energija, nors beveik visa energija vis dėlto tenka α dalelei. α dalelei susiduriant su kitomis dalelėmis, ši energija pasiskirsto tarp tų dalelių ir galiausia virsta šilumine energija. Esant pakankamai daug α dalelių, gali būti stebimas temperatūros padidėjimas.

Ši išsiskirianti energija gali pasirodyti labai menka, ir vis dėlto energijos kiekiai nebus maži, nes vos keliuose gramuose medžiagos esti milžiniškas branduolių skaičius.

Pavyzdys

Apskaičiuosime, kiek energijos išsiskirs skylant 2,0 g = 0,002 kg radžio izotopo ^{226}Ra.

Vieno ^{226}Ra branduolio masė yra apie 226 a.m.v., tad

$$226 \text{ a.m.v.} = 226 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 3{,}75 \cdot 10^{-25} \text{ kg}.$$

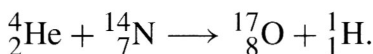
Taigi 0,002 kilograme ^{226}Ra yra

$$\frac{0{,}002}{3{,}75 \cdot 10^{-25}} = 5{,}33 \cdot 10^{21} \text{ branduolių}.$$

Vadinasi, išsiskirs toks energijos kiekis:

$$5{,}33 \cdot 10^{21} \cdot 0{,}77 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 4{,}1 \cdot 10^{9} \text{ J}.$$

Šis energijos kiekis atitinka energiją, kurios yra maždaug 140 ℓ naftos, arba vidutinės šeimos elektros energijos suvartojimą per 4 mėnesius.



Energijos sugėrimas

Susidūrus greitai α dalelei su ramybės būsenoje esančiu azoto branduoliu, gali susidaryti deguonies izotopas (^{17}O) ir protonas:

$$^{4}_{2}\text{He} + {}^{14}_{7}\text{N} \longrightarrow {}^{17}_{8}\text{O} + {}^{1}_{1}\text{H}.$$

Apskaičiuojame rimties masių pokytį ir jį atitinkančią energiją:

prieš reakciją	^{4}He 4,0015 a.m.v.	po reakcijos	^{17}O 16,9947 a.m.v.
	^{14}N 13,9992 a.m.v.		^{1}H 1,0073 a.m.v.
	18,0007 a.m.v.		18,0020 a.m.v.

Matome, kad šios reakcijos metu padidėja rimties masė, o būtent, jos prisideda 18,0020 a.m.v. – 18,0007 a.m.v. = 0,0013 a.m.v. Tai reiškia, jog reakcija gali įvykti tik tuo atveju, jei α dalelė yra greita, t. y. jei ji atsineša su savimi reikiamą kiekį kinetinės energijos. Taigi šioje reakcijoje dalis α dalelės kinetinės energijos virsta rimties mase.

412

Branduolio energija

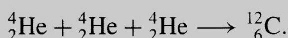
Be α, β ir γ skilimo, yra dar du iš esmės visiškai skirtingi reakcijų tipai, kurių metu išsiskiria branduolinė energija – tai *sunkiųjų branduolių dalijimasis* (*skilimas*) bei dviejų *lengvųjų branduolių jungimasis (sintezė).* Norint paaiškinti, kaip tai vyksta, paranku pasinaudoti vienam nukleonui tenkančios branduolio masės sąvoka. Kaip jau minėta, branduolio, sudaryto iš $A = Z + N$ nukleonų, masė yra apie A a.m.v.; taigi vienam nukleonui tenka apie 1 a.m.v. branduolio masės. Pabandę apskaičiuoti tiksliau, gauname, jog, pavyzdžiui, vienam ^{4}He nukleonui tenkantis branduolio masės kiekis:

$$\frac{4{,}0015 \text{ a.m.v.}}{4} = 1{,}00038 \text{ a.m.v.}$$

Pasirodo, jog vienam nukleonui tenkanti branduolio masė per visą periodinę elementų lentelę (su keliomis išimtimis) kinta dėsningai. Grafikas kitame puslapyje vaizduoja vienam nukleonui tenkančią branduolio masę kaip nukleonų skaičiaus A funkciją. Pagal šį grafiką galima paaiškinti, kodėl jungiantis lengviesiems branduoliams bei dalijantis sunkiesiems, išsiskiria energija. Dviejų lengvųjų branduolių jungimasis į sunkesnį grafike atitinka poslinkį (į dešinę) mažesnės vienam nukleonui tenkančios masės link, taigi čia išsiskiria masė, vadinasi, ir energija.

Sunkiojo branduolio dalijimasis į du mažesnius grafike atitinka poslinkį (į kairę) mažesnės vienam nukleonui tenkančios masės link, taigi čia išsiskiria masė, vadinasi, ir energija.

Kaip lengvųjų branduolių jungimosi pavyzdį panagrinėkime α tripleto reakciją, kuomet trys susidūrusios α dalelės virsta anglies izotopo ^{12}C branduoliu:



$$^{4}_{2}\text{He} + ^{4}_{2}\text{He} + ^{4}_{2}\text{He} \longrightarrow ^{12}_{6}\text{C}.$$

$$\text{Vidutinė vienam nukleonui tenkanti masė} = \frac{\text{branduolio masė}}{\text{nukleonų skaičius}}$$

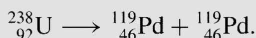
Vienam nukleonui tenkanti branduolio masė, išreikšta a.m.v., kaip nukleonų skaičiaus A funkcija.

Kadangi vienam α dalelės nukleonui tenka didesnė branduolio masė negu vienam ^{12}C branduolio nukleonui, reakcijos metu masė sumažėja. Pagal lentelę 91 p. tas masės defektas bus toks:

$$3 \cdot 4{,}0015 \text{ a.m.v.} - 11{,}9967 \text{ a.m.v.} = 0{,}0078 \text{ a.m.v.}$$

Vadinasi, išsiskirs $0{,}0078 \cdot 149$ pJ $= 1{,}16$ pJ energijos. Branduolių krūviai teigiami, todėl tarp jų veikia stūmos jėgos. Kad galėtų jungtis, jie turi lėkti vienas į kitą dideliu greičiu, o tam reikia labai aukštų – šimtų milijonų laipsnių – temperatūrų. Tokie procesai vyksta žvaigždžių viduje, tačiau α tripleto reakcijai būtina dar viena sąlyga – trys dalelės turi būti vienu metu toje pačioje vietoje. Todėl ši reakcija vyksta itin retai; ir vis dėlto visa Visatoje esanti anglis yra susidariusi būtent tokios reakcijos metu! Be tripleto reakcijos nebūtų Visatoje gyvybės.

Kaip dalijimosi reakcijos pavyzdį panagrinėkime savaiminį ^{238}U branduolio dalijimąsi, kai branduolys skyla į dvi lygias dalis:



$$^{238}_{92}\text{U} \longrightarrow {}^{119}_{46}\text{Pd} + {}^{119}_{46}\text{Pd}.$$

Kadangi vienam urano branduolio nukleonui tenka didesnė masė negu vienam paladžio branduolio nukleonui, tai reakcijos metu rimties masė sumažėja. Pagal lentelę 91 p. tas masės defektas yra šitoks:

$$238{,}0003 \text{ a.m.v.} - 2 \cdot 118{,}9034 \text{ a.m.v.} = 0{,}1935 \text{ a.m.v.}$$

Vadinasi, išsiskiria $0{,}1935 \cdot 149$ pJ $= 28{,}8$ pJ energijos.

Vis dėlto savaiminis ^{238}U branduolių dalijimasis yra itin retas reiškinys (o jeigu ir vyksta, tai retai kada branduolys skyla lygiai per pusę).

Žvaigždžių gyvenimas ir mirtis

Žvaigždės (kaip mūsų Saulė) yra susidariusios dėl gravitacijos jėgos susitraukus milžiniškiems vandenilio ir helio debesims. Traukiantis dujų debesiui, slėgis ir temperatūra jo viduje auga, kol galiausiai debesies centre pasiekia 10 milijonų laipsnių. Tokia temperatūra yra pakankamai aukšta, kad vandenilio branduoliai imtų jungtis, sudarydami helio branduolius, o tuomet spinduliuojama energija, ir žvaigždės viduje darosi dar karščiau. Dėl to spinduliavimas stiprėja, ir žvaigždė paliauja trauktis. Dujų debesis ima švytėti – gimsta žvaigždė. Priklausomai nuo dydžio, joje esančio vandenilio gali pakakti šviesti milijonus ar milijardus metų.

Vandeniliui išsibaigus, spinduliavimas negali išlikti toks stiprus, kad sutrukdytų gravitacijos jėgai žvaigždę gniuždyti, ir žvaigždė vėl traukiasi, o temperatūra jos viduje vėl pakyla. Jei žvaigždė pakankamai didelė, temperatūra gali pasiekti 100 milijonų laipsnių, ir helio branduoliai, vykstant α tripleto reakcijai (žr. 93 p.), pradės jungtis sudarydami izotopo ^{21}C branduolius. Kitos galimos reakcijos yra ^{4}He jungimasis su ^{12}C, susidarant ^{16}O, bei ^{4}He jungimasis su ^{16}O, susidarant ^{20}Ne.

Pratimas

Užrašykite šių trijų procesų reakcijų lygtis. Nustatykite išsiskiriančią energiją.

Galiausiai kai branduolinis kuras – helis – išsibaigia, žvaigždė dar sykį ima trauktis, ir temperatūra vėl kyla. Jei žvaigždė pakankamai didelė, tai temperatūra gali pasiekti 600 milijonų laipsnių, ir tada anglies branduoliai ims jungtis, sudarydami magnio branduolius. Tai gali trukti, kol temperatūra pasiekia 3 milijardus laipsnių. O tokios temperatūros pakanka, kad susidarytų geležies branduoliai. Anksčiau ar vėliau kuras pasibaigs, ir žvaigždė užges. Tačiau iki tol ji jau bus suspėjusi pagaminti lengvųjų cheminių elementų – ličio, berilio ir t. t. O jei žvaigždė pakankamai didelė, tai bus pagaminta cheminių elementų iki geležies imtinai.

Tai, kaip žvaigždė miršta, priklauso nuo jos dydžio. Mažos žvaigždės užgęsta ramiai, o didelės miršta audringai. Branduolinėms reakcijoms žvaigdėse nutrūkus, žvaigždės vidus subliūkšta į kompaktišką žvaigždės likutį, o jos išoriniai sluoksniai – jei tai maža žvaigždė – atstumiami, o jei didelė – nubloškiami su milžiniška jėga, ir žvaigždė virsta *supernova*. Štai tokių sprogimų metu per sekundės dalis išsiskiria tiek energijos, kad jos pakanka susidaryti ir sunkiesiems elementams nuo geležies iki urano.

Tas kompaktiškas žvaigždės likutis esti trijų skirtingų tipų:

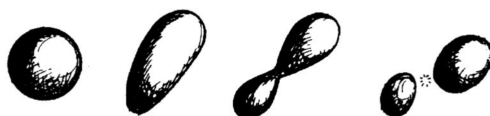
1) *Baltoji nykštukė.* Čia medžiaga taip stipriai suspausta, kad atomai liečiasi vienas su kitu, tačiau gravitacijos jėga nėra tokia stipri, kad suardytų atomų struktūrą. Mūsų Saulė galiausiai virs baltąja nykštuke.

2) *Neutroninė žvaigždė.* Čia atomų struktūra būna suirusi, elektronai įspausti į branduolius, kur jiems jungiantis su protonais, susidaro neutronai. Žvaigždė virsta milžinišku atomo branduoliu, susidedančiu vien iš neutronų, tačiau gravitacijos jėga nėra tokia stipri, kad sutraiškytų tuos neutronus.

3) *Juodoji bedugnė.* Čia neutronų struktūra suyra – gravitacijos jėga įspaudžia juos vieną į kitą. Visa žvaigždę sudaranti medžiaga tiesiogine to žodžio prasme suspaudžiama iki taško. Nebėra daugiau tokios būvio formos, kuri atsilaikytų prieš gravitacijos jėgos gniaužtus. Aplink juodąją bedugnę gravitacijos jėga tokia stipri, jog į ją įtraukiama net šviesa, iš čia toks pavadinimas – juodoji bedugnė. Jei net šviesa negali ištrūkti, vadinasi, į ją sugarma viskas. Juodojoje bedugnėje tokios sąvokos kaip laikas ir erdvė netenka prasmės.

4.2. Sunkiųjų branduolių dalijimasis

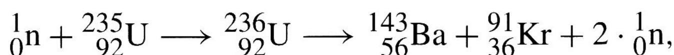
Taip vadinamos reakcijos, kurių metu sunkusis branduolys skyla į du daugmaž lygius branduolius. Kai kurie labai sunkūs branduoliai esti tokie nestabilūs, kad dalijasi *savaime.* Kiti branduoliai priverčiami skilti – jie apšaudomi neutronais.



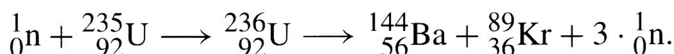
Savaiminis dalijimasis.

Tokia dalijimosi reakcija naudojama atominėse elektrinėse elektros energijai gaminti. Plačiausiai jose naudojamas kuras – urano izotopas ^{235}U. ^{235}U sudaro tik 0,7% gamtoje randamo urano, kita dalis (99,3%) yra izotopas ^{238}U.

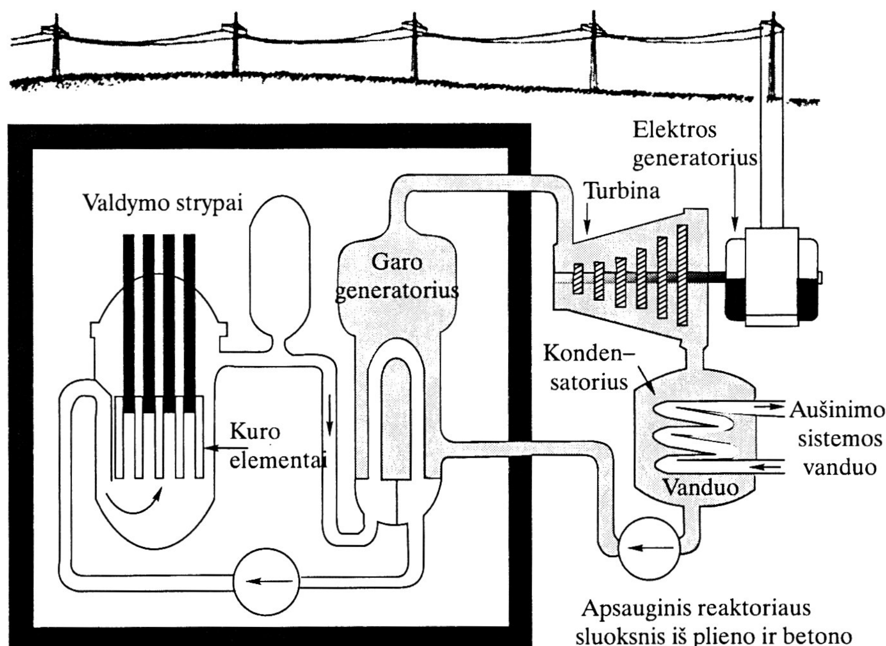
Šiaip ^{235}U yra ne per labiausiai linkęs skilti, tačiau dalijasi pataikius į branduolį *lėtam* neutronui. Per nepaprastai trumpą laiką susidaro izotopas ^{236}U, kuris savo ruožtu tuojau pat skyla. Yra daug galimų tokio dalijimosi baigčių, pavyzdžiui:



$$ {}^{1}_{0}\mathrm{n} + {}^{235}_{92}\mathrm{U} \longrightarrow {}^{236}_{92}\mathrm{U} \longrightarrow {}^{143}_{56}\mathrm{Ba} + {}^{91}_{36}\mathrm{Kr} + 2 \cdot {}^{1}_{0}\mathrm{n}, $$



$$ {}^{1}_{0}\mathrm{n} + {}^{235}_{92}\mathrm{U} \longrightarrow {}^{236}_{92}\mathrm{U} \longrightarrow {}^{144}_{56}\mathrm{Ba} + {}^{89}_{36}\mathrm{Kr} + 3 \cdot {}^{1}_{0}\mathrm{n}. $$



Reaktorius. Atominė elektrinė su verdančio vandens reaktoriumi.

Praktiškai dalijimosi reakcijos energija gaunama *atominiame reaktoriuje.* Reaktorių yra įvairių tipų. Pirmoji pasaulyje pramoninė atominė elektrinė pradėjo veikti 1954 m. Sovietų Sąjungoje. Nuo to laiko pasaulyje pastatyta apie 500 reaktorių. Atominė elektrinė veikia panašiu principu kaip ir šiluminė, tik energija čia gaunama ne deginant garo katile anglį, naftą ar dujas, o dalijantis atominiame reaktoriuje branduoliams. Paprastai kaip kuras naudojamas *prisodrintas* uranas, t. y. gamtinis uranas su padidintu iki keleto procentų ^{235}U kiekiu.

Norint valdyti dalijimosi reakciją kyla problemų. Visų pirma, neutronai turi būti lėti – mat greitus neutronus sugeria ^{238}U. Todėl reikalinga „stabdymo priemonė“ – vadinamasis *lėtiklis,* pavyzdžiui, vanduo, sunkusis vanduo arba grafitas. Susiduriant neutronams su lėtiklio branduoliais, jų greitis mažėja. Paprasčiausias vanduo yra puikus lėtiklis, tačiau turi tą trūkumą, kad jis pats sugeria neutronus, ir naudojant kaip lėtiklį paprastą vandenį, uranas turi būti daugiau prisodrintas nei reaktoriuje, kur lėtiklis – sunkusis vanduo.

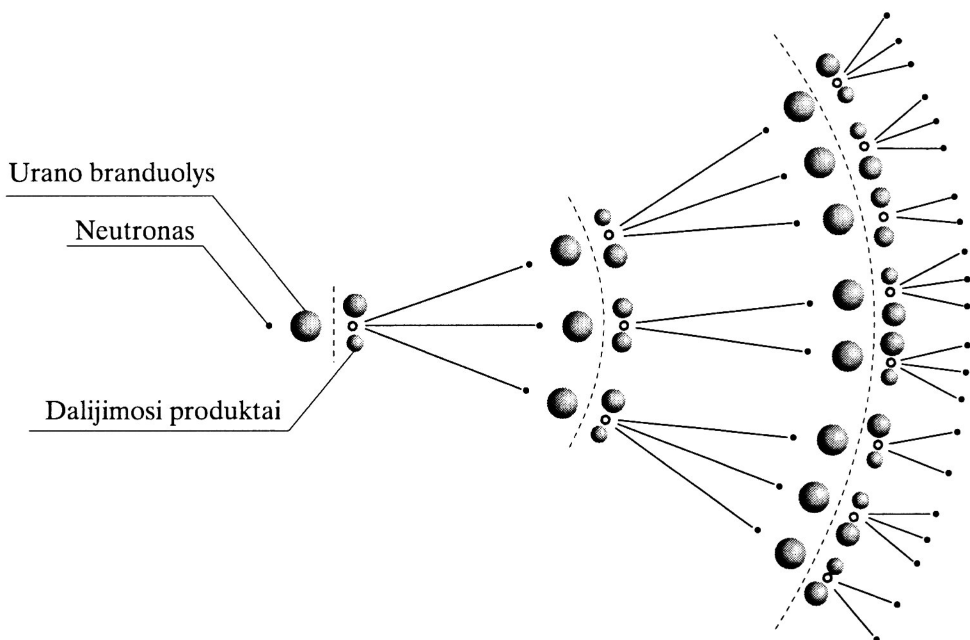
Dalijantis branduoliui, paprastai išspinduliuojami 2 arba 3 neutronai, t. y. susidaro 1 arba 2 neutronais daugiau.

Jei tie pertekliniai neutronai nebus sugeriami, jie sukels vis daugiau dalijimosi aktų, ir grandininė reakcija pratrūks griūtiškai. Dėl to ims

skirtis tiek daug energijos ir taip sparčiai kilti temperatūra, kad kuras bei medžiagos, iš kurių padarytas reaktorius, ims lydytis, – sakoma, kad reaktorius *susilydo* („kiniškasis sindromas“). Pertekliniams neutronams sugerti naudojami vadinamieji valdymo strypai. Jie daromi iš smarkiai sugeriančios neutronus medžiagos, pavyzdžiui, kadmio ar boro. Reakcija valdoma įleidžiant strypus giliau ar ištraukiant aukščiau, o norint reakciją iš viso sustabdyti, pavyzdžiui, kai reikia pakeisti kuro elementus, valdymo strypai įleidžiami į reaktorių iki pat galo.

Norint įvertinti atominės energijos privalumus ir trūkumus, reikia atsižvelgti į daugelį aplinkybių, kaip antai į kurą, saugumą, atliekas. Kai kuriuos iš tokių aspektų toliau ir panagrinėsime.

Iš diagramos 81 puslapyje matyti, jog atominių elektrinių indėlis į foninę spinduliuotę yra labai mažas. Tačiau radioaktyvumas gali labai plačiai pasklisti įvykus nelaimingam atsitikimui ar avarijai. Tai gali būti lėktuvo katastrofa, teroristų antpuolis ar Žemės drebėjimas; gali būti veiklos sutrikimai pačioje elektrinėje, ir čia visų pirma turima galvoje aušinimo sistemos gedimai. Vandens (ar kito aušintuvo) apytakai apie reaktoriaus branduolį nutrūkus, temperatūra ima smarkiai kilti. Tuomet iš karto nusileidžia valdymo strypai ir dalijimosi reakcija sustabdoma. Bet jau susidarę dalijimosi produktai esti tokie radioaktyvūs, kad tempe-



Grandininė reakcija.

ratūra ir toliau tebekyla. Tuomet paleidžiama avarinė aušinimo sistema, ir visas reaktoriaus branduolys užtvindomas vandeniu.

Reaktorių kuras nėra tiek prisodrintas, kad avarija baigtųsi tokiu sprogimu kaip atominės bombos. Bet jeigu neveikia avarinės aušinimo sistemos, temperatūra ir toliau gali kilti, ir tuomet, blogiausiu atveju, gali išsilydyti reaktoriaus betoninis pamatas – o sugriuvus pastatui, radioaktyviosios medžiagos labai plačiai pasklis į aplinką.

Daugiausia minimos dvi nuo atominių reaktorių naudojimo pradžios (1950 m.) įvykusios avarijos: Trijų mylių salos elektrinėje (*Three Mile Island*) Harisberge (JAV) 1979 m. ir Černobylyje (SSRS) 1986 m. Trijų mylių salos elektrinėje avarija įvyko dėl techninių gedimų bei žmogaus klaidų, o Černobylyje – visų pirma dėl žmonių kaltės.

413 414 415

Trijų mylių sala, 1979

Dėl gedimo išorinėje vandens aušinimo sistemoje (žr. pav. 97 puslapyje) valdymo strypai automatiškai sustabdė branduolių dalijimosi reakciją. Tačiau vykstant radioaktyviojo skilimo procesams, energija reaktoriuje tebesiskyrė – apie 5% normalaus kiekio. Kadangi vandens apytaka išorinėje aušinimo sistemoje buvo nutrūkusi, tai vidinės aušinimo sistemos vanduo atiduoti šilumos negalėjo. Buvo įjungta avarinė aušinimo sistema, tačiau dėl ventilio gedimo rezervuaras ėmė leisti vandenį, ir tūkstančiai litrų radioaktyvaus vandens plūstelėjo į reaktoriaus pastatą bei į kitą gretimą pastatą už apsauginio betono sluoksnio. Kuro elementai suskeldėjo ir apsilydė.

Po to vykstant cheminiams procesams ($2H_2O \rightarrow 2H_2 + O_2$), reaktoriuje susidarė didelis vandenilio burbulas. Bijota, kad tas vandenilio burbulas užkirs kelią aušinančiam vandeniui, ir reaktorius ims lydytis. Kitas pavojus buvo, kad burbulas sprogs. Vandenilio burbulą pavyko pašalinti ir reaktorių vėl ataušinti. Trijų mylių salos elektrinės avarijoje aukų nebuvo. Tvarkymo darbai truko 10 metų ir kainavo apie 1,1 milijardų dolerių.

Černobylis, 1986

Černobylio reaktorius buvo verdančio vandens tipo reaktorius su grafito lėtikliu; tokio tipo reaktoriai Vakarų Europoje ar JAV nenaudojami, bet jie naudojami Lietuvoje, Ignalinos AE. Šio tipo reaktoriuose vanduo užverda pačiame reaktoriuje, ir garai iš čia keliauja tiesiai į generatorių sukančią turbiną.

Eilinio patikrinimo metu buvo sumanyta atlikti keletą bandymų ir pasižiūrėti, kokia galia bus gaunama pristabdžius turbiną. Bandymą darė žmonės, neturėję reikiamo supratimo apie reaktorių fiziką. Kadangi galia buvo per maža, dauguma valdymo strypų buvo ištraukta, o automatinė apsaugos sistema atjungta, nes eksperimentuojant reaktorių *norėta valdyti* rankiniu būdu. Net gavus valdymo patalpoje pranešimą, kad reaktoriaus būsena labai nestabili, dar gerą minutę bandymas buvo tęsiamas. Tuomet slėgis taip smarkiai išaugo, kad buvo nuspręsta valdymo strypais reakciją sustabdyti. Bet jau buvo per vėlu. Reakcija vyko griūtiškai. Vandens garai skilo į vandenilį ir deguonį: $2H_2O \rightarrow 2H_2 + O_2$ (toks dujų mišinys itin sprogus, tai – „sprogstamosios dujos“), ir nugriaudėjo sprogimai.

Garai sustabdė aušinančiojo vandens tiekimą, aušinimo sistemos vamzdžiai susproginėjo, kuro elementai suskeldėjo. Įvykus smarkiam sprogimui, išlakstė reaktoriaus ir pastato dalys, pastate įsiplieskė gaisras. Per šį sprogimą ir po to visą savaitę skyrėsi radioaktyviosios medžiagos, kurios su besikeičiančios krypties vėjais pasklido po didesniąją Europos dalį (apie 25% išsiskyrė per pirmąją dieną). Buvo mėginama tai sumažinti mėtant iš malūnsparnių ant reaktoriaus didelius paketus su švinu, smėliu, moliu ir boro karbidu (boro karbidas yra neutronus sugerianti medžiaga). Taip norėta užgesinti gaisrą ir sugerti kuo daugiau radioaktyviosios spinduliuotės. Tai pavyko, tačiau nepraėjus nė savaitei, temperatūra vėl ėmė kilti, nes numestosios medžiagos veikė kaip šilumos izoliacija. Tuomet buvo pragręžtas kanalas, pro kurį į reaktorių buvo leidžiamas azotas (N_2). Taip pavyko užgesinti gaisrą, o radioaktyviųjų medžiagų skverbimasis į išorę sumažėjo beveik iki nulio.

Praėjus trims mėnesiams po nelaimės, SSRS vyriausybė konstatavo, kad 28 žmonės mirė, šimtai susirgo spinduline liga, o numatomi ekonominiai nuostoliai – mažiausiai 846 milijonai dolerių.

Tačiau 1988 m. gruodį patirti nuostoliai ir išlaidos jau buvo įvertinti apie 4230 milijonų dolerių.

4.3. Sunkiųjų branduolių sintezė

Saulės spinduliuojama energija, kuri iš viso sudaro apie $3{,}8 \cdot 10^{26}$ džaulių per sekundę, išsiskiria Saulėje vykstant branduolių sintezės reakcijoms. Galutinis šių reakcijų rezultatas – vandenilis virsta heliu.

Branduolių sintezės reaktorių, kur energiją būtų galima gaminti kaip Saulėje, dar nėra. Jei pavyktų valdyti branduolių sintezės reakciją, turėtume beveik neišsemiamą energijos šaltinį. Mat kuras čia būtų vandenilis, o jo vandenynuose yra pakankamai.

Visuose ligšioliniuose sintezės reaktorių bandymuose energijos buvo daugiau suvartojama nei gaunama. Norint pasiekti norimą rezultatą, svarbiausia yra gebėti pakankamai ilgai išlaikyti aukštą temperatūrą ir gana didelį vadinamosios *plazmos* tankį. Pagal vieną iš tyrimo programų (Jungtinis Europos Toras – JET), kur dirbama su sintezės energija, 1991 m. lapkritį pavyko per 2 sekundes gauti 1,7 MW energijos. Temperatūra ten buvo 200 milijonų laipsnių (Saulės centre tėra vos apie 15 milijonų laipsnių).

Pagal JET programą dirbama ir toliau, tačiau tikriausiai praeis dar daug metų, kol pradės veikti tikras pramoninis branduolių sintezės reaktorius.

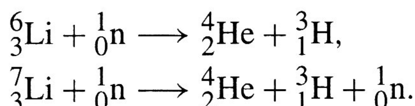
Nors branduolių sintezės reaktorius suvartos daug kuro, tačiau čia spinduliavimo pavojus bei atliekų problema kur kas mažesni nei branduolių dalijimosi reaktorių. Mat atliekas jame sudaro trumpo pusamžio branduoliai. Pagaliau toks reaktorius yra ir kur kas saugesnis. Mat visas sunkumas čia – išlaikyti plazmą, kad sintezės reakcija iš viso galėtų vykti, o jeigu kas nors atsitinka su valdymu, tai reakcija paprasčiausiai nutrūksta savaime.

JET programos branduolių sintezės reaktoriuje (vadinamajame tokamake) jungiasi vandenilio izotopai – deuteris (^{2}H) ir tritis (^{3}H):



$$ {}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{3}_{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} + \text{energija.} $$

Deuterio gamtoje yra pakankamai (vandenyje), o tritį tenka gauti dirbtiniu būdu. Jis gaminamas pačiame sintezės reaktoriuje iš metalo ličio (kurio gamtoje taip pat yra pakankamai):



$$ {}^{6}_{3}\mathrm{Li} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \longrightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{3}_{1}\mathrm{H}, $$
$$ {}^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \longrightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{3}_{1}\mathrm{H} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}. $$

Kaip matome, veikiantis reaktorius naudoja tik deuterį ir litį.

Tokioje milžiniškoje temperatūroje, kokioje vyksta branduolių sintezės reakcijos, kuro atomai esti suskilę, tad branduoliai ir elektronai būna kas sau. Toks medžiagos būvis vadinamas *plazma*. Aukšta temperatūra čia būtina, kad sintezės reakcija galėtų vykti, t. y. kad būtų įveiktos tarp vandenilio branduolių besireiškiančios elektrinės stūmos jėgos.

Plazmą sudaro elektringosios dalelės, taigi ją galima valdyti elektromagnetiniu lauku. Tokamakas yra milžiniškas žiedas, apgaubtas stiprių elektromagnetų, kurie ir išlaiko plazmos srautą jo viduje. Kaip vyksta šis apie 15 s trunkantis eksperimentas, aprašyta toliau.

4.4. Branduolinis ginklas

Žurnalisto, pirmo bandomojo sprogdinimo liudininko, įspūdžiai:

„... Regis, visi iš karto pajuto, jog šis sprogimas pranoko didžiausius mokslininkų lūkesčius ir drąsiausias viltis.

Apėmė jausmas, jog dabar kad ir kas būtų, mes turime priemonę užtikrinti greitą karo baigtį ir išgelbėti tūkstančius amerikiečių gyvybių; o kalbant apie ateitį, tai pasaulyje atsirado kažkas nauja ir didinga, kažkas, kas pasirodys nepalyginti svarbiau už elektros atradimą ar kitus didžiuosius, taip palietusius mūsų būtį, išradimus.

Sprogimo veikmę galima drąsiai pavadinti neprilygstama, didinga, puikia, gniaužiančia kvapą ir keliančia baimę. Dar niekuomet žmogus nebuvo sukūręs tokios didžios jėgos reiškinio. Prieš jo šviesos efektus plunksna bejėgė. Visą kraštovaizdį nutvieskė skvarbi, daug kartų skaistesnė už vidudienio saulę šviesa; ji rodėsi auksinė, violetinė, purpurinė, pilkšva ir žydra; ji apšvietė kiekvieną netoliese stūksančių kalnų viršūnę, įdubą ir keterą taip ryškiai ir gražiai, kad neįmanoma apsakyti, tai reikia tik pamatyti. Apie tokį grožį svajojantys didieji poetai tegalėtų jį aprašyti tik skurdžiai ir ribotai. Praėjus trisdešimčiai sekundžių po sprogimo, kilo oro slėgio banga, grasinanti nuo žemės paviršiaus nušluoti visa, kas gyva ir negyva, ir po akimirkos sekė smarkus, nepaliaujamas, siaubą keliantis griaudesys, įspėjantis apie visuotinio teismo dieną bei

leidžiantis suvokti, kad šventvagiška buvo mums, menkiems sutvėrimams, šauktis tų jėgų, kurios ligšiol tebuvo Visagalio žinioje. Žodžiai bejėgiai to nemačiusiam apsakyti kūną, dvasią ir sielą apėmusias pajautas. Kad tuo patikėtum, reikėjo ten būti".

1938 m. buvo atrasta branduolių dalijimosi reakcija, o 1941 m. JAV visiškai slaptai pradėjo atominės bombos kūrimo programą. Vienas iš stimulų buvo būgštavimai, kad vokiečiai suspės pirmieji sukurti šį ginklą. Pirmas svarbus šios vadinamosios Manheteno programos (kurioje dirbo 200 000 žmonių) rezultatas buvo pirmojo atominio reaktoriaus bandymas, įvykęs 1942 m. Čikagoje. Vokietijai 1945 m. gegužę kapituliavus, vienos iš priežasčių, kuria buvo grindžiamas Manheteno programos būtinumas, neliko. Tačiau visu smarkumu tebesiautėjo karas su japonais. 1945 m. liepą buvo atliktas pirmas bandomasis sprogdinimas dykumoje Naujojoje Meksikoje, o 1945 rugpjūčio 6 d. ant Hirosimos numesta pirmoji pasaulyje atominė bomba. Tai buvo vadinamoji urano atominė bomba, jos veikimas pagrįstas tuo, kad esant pakankamai dideliam medžiagos kiekiui, dalijimosi reakcija urane ^{235}U vyksta griūtiškai. Urano atominėje bomboje suglaudžiami du urano gabalai, kurių kiekvieno atskirai masė mažesnė už *krizinę*, o kai bendra urano masė pasidaro didesnė už krizinę, atominė bomba sprogsta.

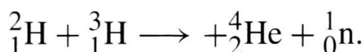
Krizinė masė

Neutronas urano gabale ne visuomet pradeda dalijimosi reakciją, – yra ir kitokių galimybių. Jis gali, pavyzdžiui, ištrūkti, gali būti sugertas ^{238}U ar kitų medžiagų. Tikimybė neutronui ištrūkti yra proporcinga gabalo paviršiaus plotui. Tikimybė neutronui sukelti ^{235}U branduolio dalijimąsi proporcinga gabalo tūriui. Jei gabalas yra, pavyzdžiui, rutulys, tai jo spinduliui padvigubėjus, paviršiaus plotas (taigi ir neutronų netekimas) padidėja 4, o tūris (taigi ir neutronų daugėjimas) – 8 kartus. Taigi juo didesnis gabalas, juo mažiau svarbus neutronų netekimas. Jei urano gabalo masė bus mažesnė už tam tikrą dydį, tai grandininė reakcija nevyks; o jei gabalas yra kaip tik toks, kad grandininė reakcija dar gali vykti pati savaime, ši masė vadinama *krizine*. Kokio didumo ta krizinė masė, priklauso ir nuo gabalo formos bei tankio. Mažiausią krizinę masę galima pasiekti suteikus gabalui rutulio formą (grynam ^{235}U – apie 8 kg). Tam tikrą mažesnę už krizinę masę galima paversti krizine, pavyzdžiui, apdėjus urano gabalą neutronus atspindinčia medžiaga arba suspaudus.

Po trijų dienų ant Nagasakio buvo numesta dar viena bomba. Ji buvo kitokio tipo – besidalijanti medžiaga ten buvo plutonis ^{239}Pu. Tokioje bomboje glūdi mažesnė už krizinę plutonio masė; sprogus apie plutonį esančiam užtaisui, plutonis suspaudžiamas į mažesnį tūrį, jo masė pasidaro krizinė, ir bomba sprogsta.

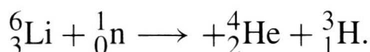
Toliau viskas vyko greitai. 1949 m. savo pirmąją atominę bombą susprogdino SSRS, o 1954 m. JAV – po keleto mažesnių bandomųjų

bombų – pirmąją *branduolių sintezės,* arba *vandenilinę bombą* (Bikinio salose Ramiajame vandenyne). Vandenilinėje bomboje jungiasi du vandenilio izotopai, būtent, ^2H (deuteris) ir ^3H (tritis):



$$^2_1H + ^3_1H \longrightarrow +^4_2He + ^1_0n.$$

Šio tipo bomba yra daug sudėtingesnė. Mat reakcija čia gali vykti tik labai aukštoje temperatūroje. Kaip „dagtis“ panaudojama branduolių dalijimosi bomba; reikalingas tritis gaunamas pačioje bomboje – reakcijoje, kurioje dalyvauja litis (Li). Dalijimosi procesai „dagtyje“, viena vertus, užtikrina sintezės reakcijai reikiamą temperatūrą, kita vertus, parūpina neutronų, reikalingų tričiui susidaryti:



$$^6_3Li + ^1_0n \longrightarrow +^4_2He + ^3_1H.$$

Neutroninė bomba yra nedidelė branduolių sintezės bomba. Reakcijos tarp deuterio ^2H ir tričio ^3H metu išsiskiriantys neutronai maždaug 1200 m spinduliu apie sprogimo židinį sukelia intensyvų neutronų spinduliavimą. Užtat pati neutroninės bombos sprogimo galia – mažesnė, šiluminė ir slėgio banga nėra tokios stiprios. Čia viskas sugriaunama maždaug 200 m spinduliu. Apie 30% neutroninės bombos energijos akimirksniu išsiskiria kaip radioaktyvioji spinduliuotė. Bombą galima

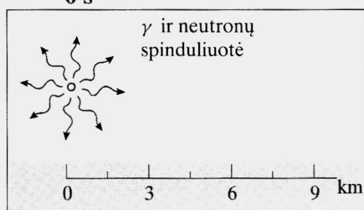


Ant sienos matyti išgaravusių nuo karščio sprogus bombai Nagasakyje kopėčių ir kareivio atvaizdas.

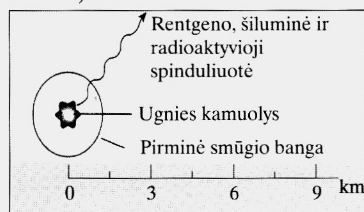
panaudoti prieš įsiveržusias tankų pajėgas savoje teritorijoje. Tankų ekipažai nuo stipraus neutronų spinduliavimo tampa nekovingi, juos pykina, jie vemia, organizmas netenka skysčių. Tačiau aplinka taip nesugriaunama kaip atominės bombos. Neiškrinta čia ir didesni kiekiai radioaktyviųjų nuosėdų, tad į vietovę, kur įvyko sprogimas, netrukus vėl galima grįžti.

Jei nukrinta bomba

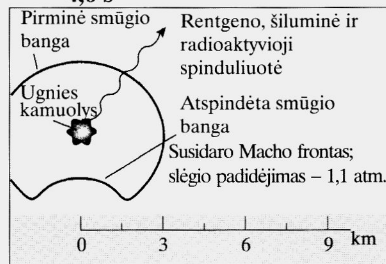
Pasižiūrėkime, kas vyksta, 2 km aukštyje virš žemės paviršiaus sprogus 1 megatonos bombai (tokios bombos sprogimo jėga yra kaip 1 milijono tonų trotilo).



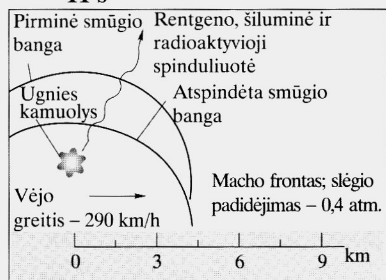
Praėjus kelioms mikrosekundėms po sprogimo, visi branduoliai jau būna suskilę bei išsiskyręs milžiniškas energijos kiekis, taip pat kelių kilometrų nuotoliu išspinduliuota daug neutronų ir γ spindulių.



Dėl sprogimo metu išsiskyrusios energijos bombos dalių temperatūra pakyla iki milijonų laipsnių, ir jie kaipmat išgaruoja. Išspinduliuojami intensyvūs Rentgeno spinduliai, kuriuos sugeria oras, dėl to smarkiai įkaisdamas. Todėl susidaro švytinčių dujų kamuolys – *ugnies kamuolys.* Jis išauga iki kelių kilometrų skersmens ir turi 6000–7000 laipsnių temperatūrą (aukštesnę nei Saulės paviršiuje!). Jis spinduliuoja ir intensyvią šviesą, ir intensyvius šiluminius spindulius. Po sprogimo padidėjęs slėgis sukelia smūgio bangą, kuri sklinda nuo sprogimo epicentro viršgarsiniu greičiu.

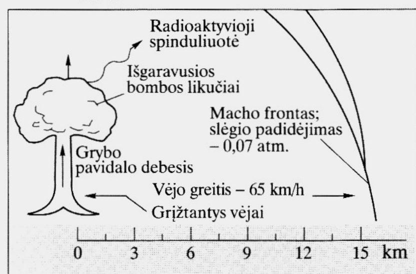


Smūgio banga nuo epicentro jau nukeliavo 3 km, pasiekusi žemę, nuo jos atsispindėjo. Tiesioginė ir atspindėtoji bangos ties žeme viena kitą sustiprina – susidaro vientisas intensyvus Macho frontas, greitai tolstantis nuo epicentro.



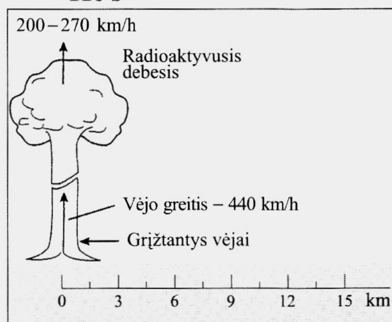
Smūgio banga jau nutolusi beveik 5 km spinduliu. Smūgio bangą lydi kelias sekundes trunkantis uraganinis vėjo gūsis (290 km/h). Ugnies kamuoliui auštant, jo šiluminis spinduliavimas slopsta, tačiau pirmąsias 10 sekundžių po sprogimo šiluminės bangos spinduliuojamos stipriai.

37 s



Smūgio banga jau nusklidusi apie 15 km. Tuo tarpu ugnies kamuolį supančios dujos maždaug 400 km per valandą greičiu šauna į viršų (panašiai kaip šilto oro balionas). Apačioje prie žemės slėgis smarkiai sumažėja ir centro link pučia stiprūs vėjai. Į centrą susiurbiami dideli kiekiai dulkių, kurie paskui ugnies kamuolį stulpu kyla į viršų. Ugnies kamuoliui plečiantis ir auštant, išgaravusios bombos likučiai kondensuojasi, ir stulpo viršuje susidaro didelis radioaktyvus debesis. Taip susiformuoja būdingas *grybo pavidalo debesis* (žr. įkliją).

110 s



Grybo pavidalo debesis čia jau išaugęs iki 11 km aukščio. Jis vis tebešauna į viršų ir pasiekęs 22 km aukštį, viršutiniuose atmosferos sluoksniuose ima irti. Centro link pažeme tebepučia grįžtantys vėjo gūsiai.

Pasekmės

Visa, kas gyva, kelių kilometrų atstumu akimirksniu gauna mirtiną *spinduliuotės* dozę, nors pats mirtinas tos spinduliuotės poveikis pasireiškia ne iš karto. Užtat tuoj pat mirštama nuo *smūgio bangos* – smūgio banga būna tokia stipri, kad visa kelių kilometrų atstumu bematant ištaškoma. Iki 7 km atstumo smūgio banga dar tokia stipri, kad griūva pastatai.

Ugnies kamuolio švytėjimas esti stipresnis už Saulės. Pažvelgus į jį iš 30 km atstumo, akimirksniu apankama, nes išdega akies tinklainė. Ugnies kamuolio šiluminis spinduliavimas taip pat stiprus – 16 km atstumu bet kokia degi medžiaga bematant užsiliepsnoja; tad išgyvenus smūgio bangą ir po jo sekančius uraganinius vėjo gūsius, tykoja dar didesnis pavojus – šiluminis spinduliavimas. Kelių kilometrų atstumu visos gyvos būtybės kaipmat išgaruoja (žr. nuotrauką 103 puslapyje), 10 km atstumu nuskrunda oda. Didesniame nuotolyje galima atsipirkti II laipsnio nudegimais.

Nuo šiluminio spinduliavimo įsiplieskia daugybė gaisrų, kuriuos dar labiau įpučia ir paskleidžia smarkūs vėjai. Todėl visa, kas dega, 16 km atstumu paskęsta liepsnose. Taip susidaro vadinamosios gaisrų audros: šiltas oras nuo milžiniško gaisro liepsnos kyla į viršų, dėl to sumažėja slėgis ir pažemiui susidaro stiprūs gūsingi iki 160 km/h greičio vėjai. Taigi galima sakyti, kad 16 km spinduliu aplinkui visi pastatai ir visa, kas gyva, sunaikinama.





Sritis apie sprogimo epicentrą prieš ir po atominės bombos sprogimo Nagasakyje.

5. Ornamentai





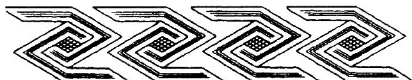
Padangų raštas smėlyje.

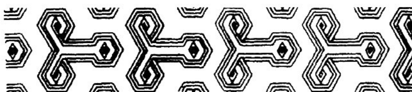
Afrikos šalyje Zaire gyvenantiems bakubams sukurti naują ornamentą yra garbės reikalas. Prieš pradėdamas valdyti naujasis karalius turi pateikti lig tol nematytą raštą, kuriuo vėliau puošiami jo būgnai.

Kai 3-iame dešimtmetyje krikščionių misionieriai bakubų karaliui pirmąkart parodė motociklą, jis neparodė didesnio susidomėjimo, tačiau smėlyje išvydęs motociklo padangų įspaudus, taip susižavėjo, kad pasidarė jų kopiją ir pavadino raštą savo vardu.

Bakubų tautelės ornamentų pavyzdžiai













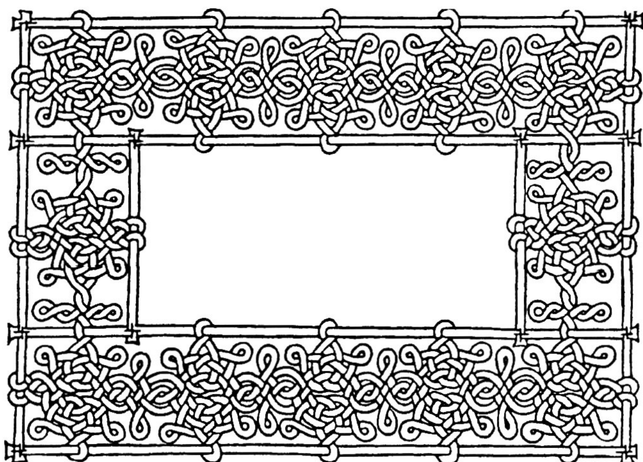


5.1. Įvadas

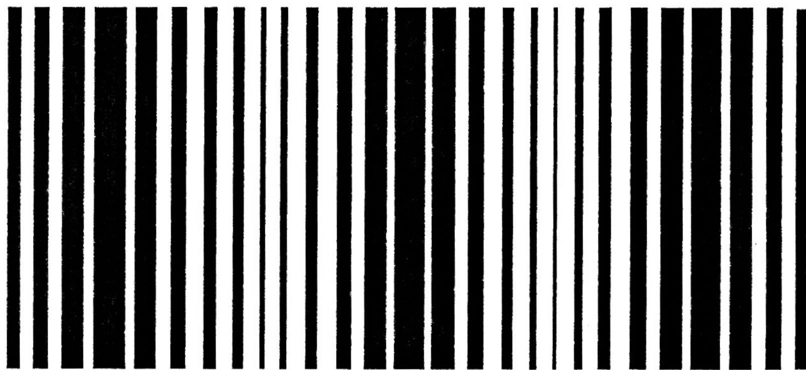
Beveik visur gamtoje ir žmonių sukurtuose daiktuose galima įžvelgti *simetriją,* ypač žinant, *kaip* žiūrėti. Sąmoningai ar nesąmoningai simetrija plačiai taikoma, pavyzdžiui, braižyboje, dailėje, architektūroje, muzikoje, šokyje, amatuose.

Akivaizdu, kad visais laikais ir visose kultūrose buvo kūrybingai dirbama, tiek griežtai laikantis tam tikros pasirinktos raštų simetrijos, tiek sąmoningai ją neigiant.

Toliau nagrinėdami ornamentų raštus, pamatysime, kad tėra tik septyni iš esmės skirtingi simetrijos variantai. Gausybė mezginių, vazų, siuvinėjimų ir kt. liudija, kad daugybė žmonių, nieko neišmanydami apie matematiką, savarankiškai „atrado“ visus tuos septynis variantus. Kita vertus, matematikai jiems davė „vardus“ bei logiškai argumentavo, kad jų yra būtent septyni.



XV a. ornamentas.



XX a. ornamentas.

5.2. Juostos judesiai

Panagrinėkime juostą tokią, kaip pavaizduota žemiau. Tarkime, ji padaryta iš permatomos stangrios medžiagos (pavyzdžiui, stiklo), papuoštos kokiu nors raštu. Juostą galima pasidaryti ir pačiam – pavyzdžiui, iš skaidrios plėvelės, naudojamos demonstracijoms projekciniu aparatu.



Įsivaizduokime, kad pasidarę tokios juostos kopiją, įvairiausiais būdais ją sukiojame, vartome ir dėliojame ant pradinės juostos. Tokie veiksmai vadinami *judesiais.*

Šie penki piešinėliai vaizduoja įvairius judesius.

Postūmis

Prieš pastumiant



Postūmis

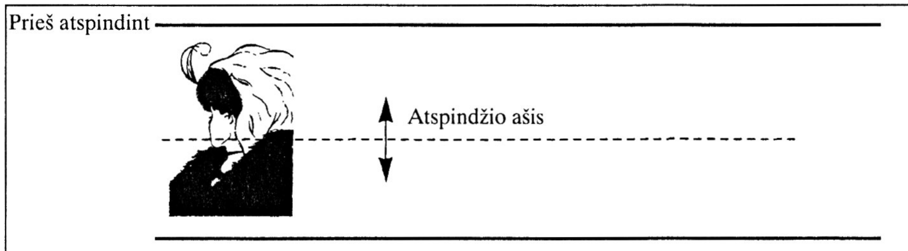


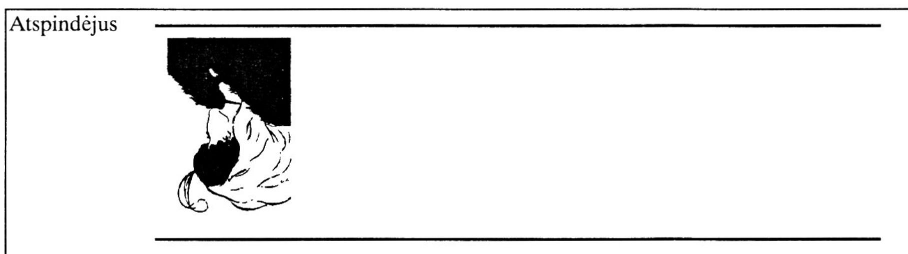
Pastūmus



Ši juosta lygiagrečiai pastumta horizontalia kryptimi. Toks judesys vadinamas postūmiu.

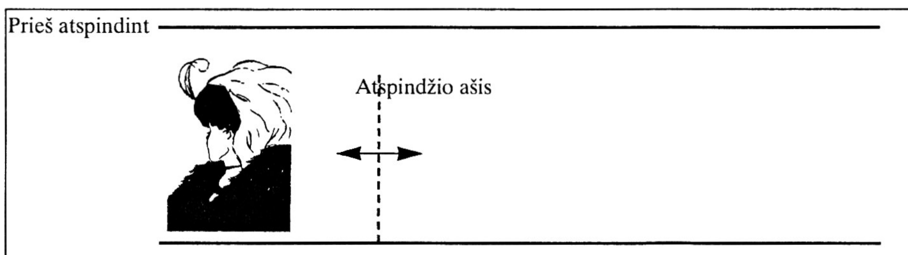
Horizontalusis atspindys





Ši juosta atspindėta horizontalios atspindžio ašies atžvilgiu. Toks judesys vadinamas horizontaliuoju atspindžiu.

Vertikalusis atspindys





Ši juosta atspindėta vertikalios atspindžio ašies atžvilgiu. Toks judesys vadinamas vertikaliuoju atspindžiu.

Posūkis

Prieš pasukant





Pasukus

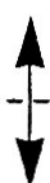


Ši juosta pasukta pusę apsisukimo.
Toks judesys vadinamas posūkiu (180°).

Slenkamasis atspindys

Prieš atspindint





Atspindžio ašis

Postūmis

Atspindėjus



Ši juosta atspindėta horizontalios ašies atžvilgiu ir kartu lygiagrečiai pastumta.
Toks judesys vadinamas slenkamuoju atspindžiu.

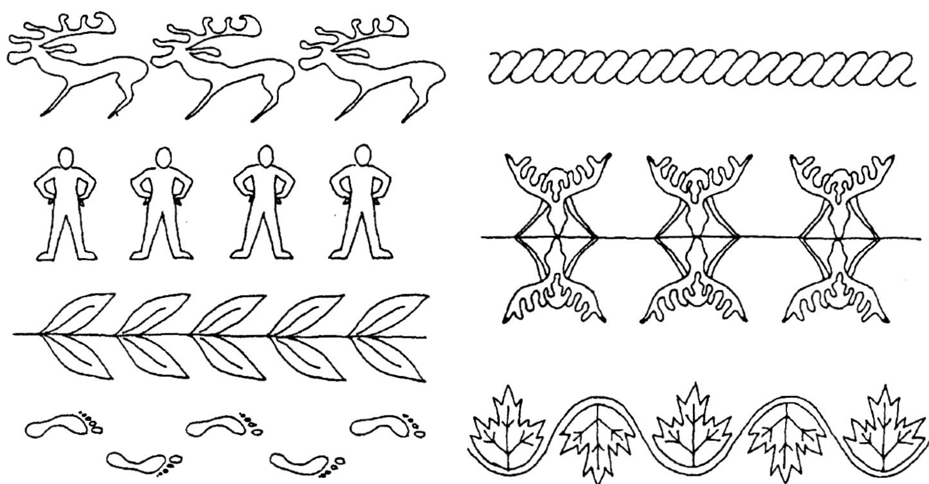
Pasirodo, kad *bet kokį* judesį galima priskirti kuriam nors vienam iš šių penkių tipų. Kad ir kaip sukiosime, vartysime, stumdysime, galutinis rezultatas bus arba postūmis, arba horizontalusis, ar vertikalusis atspindys, arba posūkis, arba slenkamasis atspindys. Kitos galimybės nėra! Šis teiginys įrodomas 118–119 p.

501

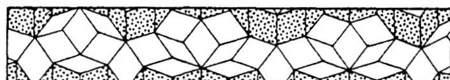
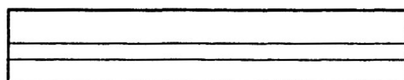
5.3. Ornamentai

Ornamentu vadinsime juostą, papuoštą kokiu nors besikartojančiu *pagrindiniu raštu.*

Nors realūs ornamentai visuomet esti tam tikro baigtinio ilgio, mes įsivaizduosime, kad nagrinėjame begalinio ilgio ornamentus (taigi pagrindinis raštas ir kairėje, ir dešinėje kartojasi be galo).

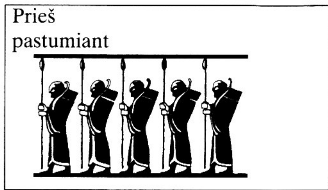


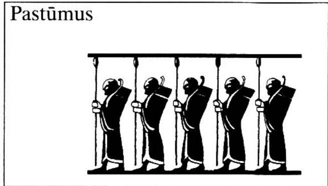
Ornamentų pavyzdžiai.

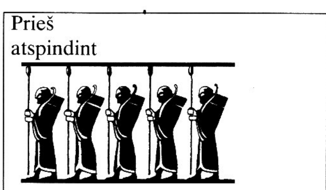
Šios juostos nėra ornamentai.

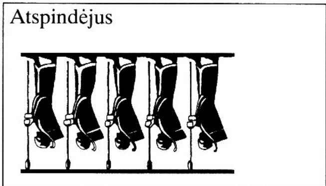
Pavyzdys: Ornamentas ir penki skirtingi judesiai



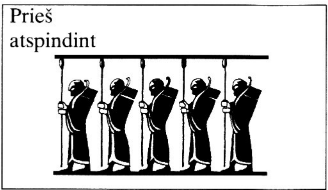


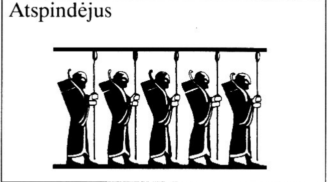
Pastumtas ornamentas.



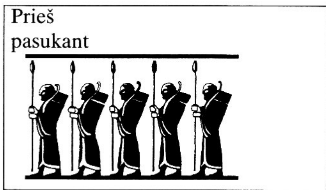


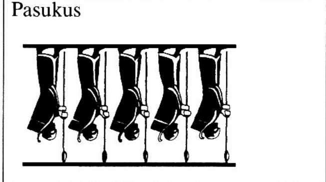
Horizontaliai atspindėtas ornamentas.



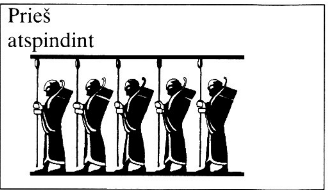


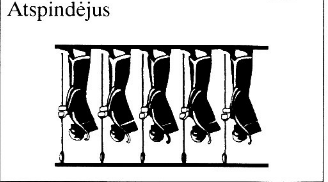
Vertikaliai atspindėtas ornamentas.





Pasuktas ornamentas.





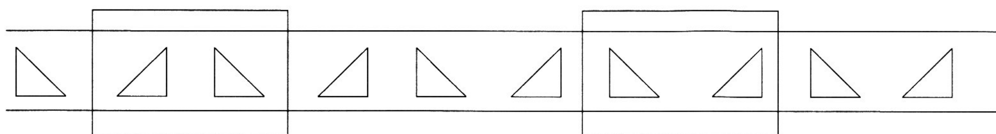
Slenkamai atspindėtas ornamentas.

8. 936

Tinkamai pastūmus ornamentą, jis nepasikeičia. Sakoma, kad ornamentas turi *postūmio simetriją.*

Mažiausias postūmis, nepakeičiantis ornamento, vadinamas fundamentaliuoju postūmiu, o jo ilgis d – ornamento rašto ilgiu.

Bet kurią *d* ilgio ornamento atkarpą galima laikyti pagrindiniu jo raštu.



Du skirtingi pagrindinio rašto pasirinkimai.

Norint įsitikinti, kad „ornamentas“ iš tikrųjų yra ornamentas, visų pirma reikia nustatyti jo pagrindinį raštą (taigi ir atitinkamo postūmio ilgį), o tuomet pažiūrėti, ar pastūmę juostą per šį ilgį, jos nepakeičiame, t. y. ji atrodo taip pat kaip prieš postūmį. Jau minėjome, kad yra daug galimybių pasirinkti pagrindinį raštą. Pavyzdžiui, pagrindiniu raštu galime rinktis kokią tik norime *d* ilgio atkarpą, čia *d* – ornamento fundamentalaus postūmio ilgis.

Panašiai kaip apie postūmio simetriją galima kalbėti ir apie posūkio simetriją; apie horizontaliąją atspindžio simetriją ir t. t.

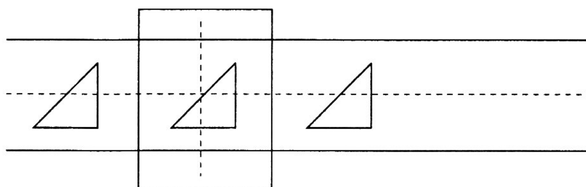
Sakome, kad ornamentas turi *posūkio simetriją*, jei pasuktojo ornamento negalima atskirti nuo pradinio. Tokiu pat būdu apibrėžiama ir *horizontaliojo, vertikaliojo atspindžio simetrijos* bei *slenkamojo atspindžio* simetrija.

502 503 504 505

5.4. Ornamentų tipai

Iš apibrėžimo aišku, kad kiekvienas ornamentas turi fundamentalųjį postūmį atitinkančią simetriją.

1 tipas



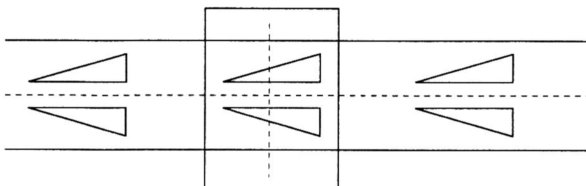
Šis ornamentas neturi jokios kitos simetrijos, išskyrus tą, kuri atitinka fundamentalųjį postūmį. Pagrindinis raštas apvestas rėmeliu.

Be postūmio simetrijos, kitų simetrijų ornamentas gali ir neturėti. Tačiau yra ornamentų, kurie turi dar ir kitų simetrijų. Kaip jau buvo minėta, kitų simetrijų gali būti tik keturios:

- horizontaliojo atspindžio simetrija;
- vertikaliojo atspindžio simetrija;
- posūkio simetrija;
- slenkamojo atspindžio simetrija.

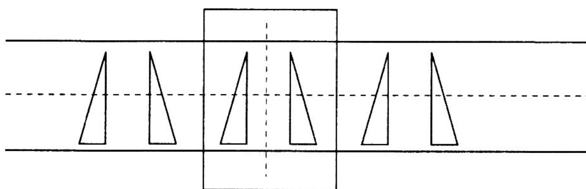
Šios simetrijos vadinamos *netrivialiomis* simetrijomis.

2 tipas



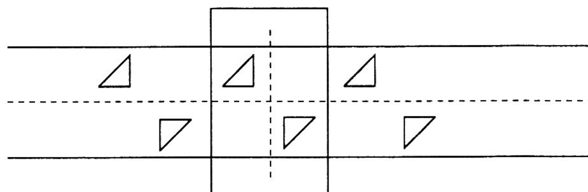
Ornamentas, turintis horizontaliojo atspindžio simetriją.

3 tipas



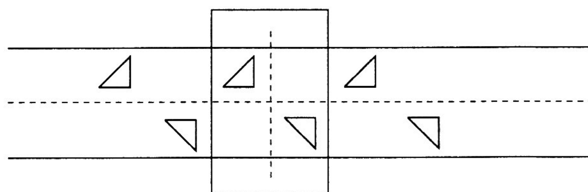
Ornamentas, turintis vertikaliojo atspindžio simetriją.

4 tipas



Ornamentas, turintis posūkio simetriją.

5 tipas



Ornamentas, turintis slenkamojo atspindžio simetriją. Norėdami tuo įsitikinti, pastumkite pagrindinį raštą per $d/2$ ir atspindėkite horizontalios ašies atžvilgiu.

Ornamento tipas nustatomas pagal jo turimas simetrijas. Kaip jau išsiaiškinome, yra ornamentų, turinčių postūmio, horizontaliojo ar vertikaliojo atspindžio ir slenkamojo atspindžio simetriją.

Kiekvienas iš anksčiau pateiktų ornamentų turi tik vieną netrivialiąją simetriją – išskyrus pavyzdį su horizontaliojo atspindžio simetrija. Mat šiame pavyzdyje slypi ir slenkamojo atspindžio simetrija (pastumkite pagrindinį raštą per d ir atspindėkite horizontalios ašies atžvilgiu). Tai yra bendras dėsningumas: jei ornamentas turi horizontaliojo atspindžio simetriją, tai jam būdinga ir slenkamojo atspindžio simetrija. Tad ornamentų, turinčių *tiktai* horizontaliojo atspindžio simetriją, nėra.

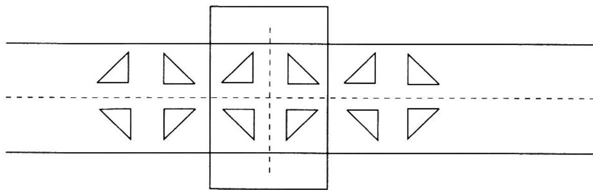
Taip pat nėra ir ornamentų, turinčių *tiktai* horizontaliojo ir vertikaliojo atspindžių simetrijas. Taip yra dėl to, kad horizontalusis atspindys su po to sekančiu vertikaliuoju atspindžiu atitinka posūkį, taigi jei ornamentas turi ir horizontaliojo, ir vertikaliojo atspindžių simetrijas, tai jis būtinai turi ir posūkio simetriją.

Pasirodo, be jau minėtų penkių skirtingų ornamentų tipų, yra dar du:

6 tipas – ornamentas, turintis visas simetrijas kartu;

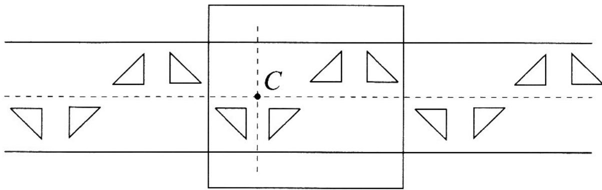
7 tipas – ornamentas, turintis visas simetrijas, išskyrus horizontaliojo atspindžio.

6 tipas



Ornamentas, turintis visas simetrijas.

7 tipas



Ornamentas, turintis visas simetrijas, išskyrus horizontaliojo atspindžio simetriją. Taškas C rodo posūkio centrą. Vertikali punktyrinė linija ženklina vertikalią atspindžio simetrijos ašį.

Apibendrinimas

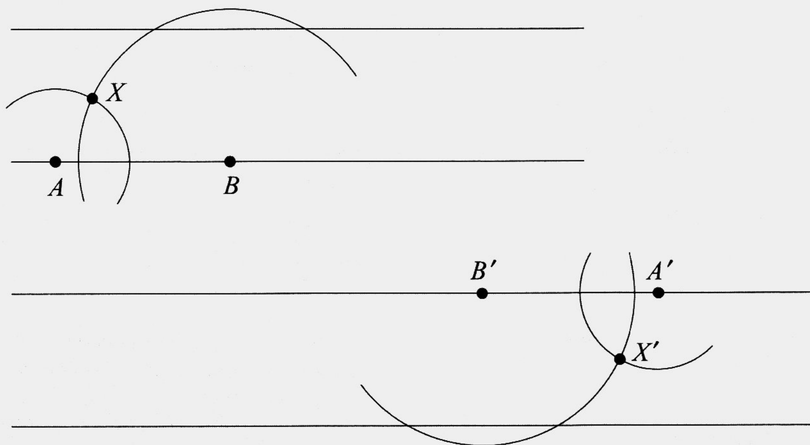
Kiekvienas ornamentas turi postūmio simetriją (kitaip jis nebūtų ornamentas). Be to, kiekvieną ornamentą galima priskirti vienam iš šių septynių tipų (nurodyta, kokias simetrijas jis turi):

1 tipas	Jokių kitų simetrijų	b b b b
2 tipas	Tik horizontaliojo ir slenkamojo atspindžio simetrija	b b b b p p p p
3 tipas	Tik vertikaliojo atspindžio simetrija	b d b d
4 tipas	Tik posūkio simetrija	b q b q
5 tipas	Tik slenkamojo atspindžio simetrija	b p b p
6 tipas	Visos simetrijos	b d b d p q p q
7 tipas	Visos, išskyrus horizontaliojo atspindžio simetriją	b q p d

506 507 508 509 510 511 512 513 514 515

Yra tik penki skirtingi judesių tipai

Iš pradžių įsitikinsime, kad žinodami, kur perkeliami du skirtingi vieno juostos krašto taškai A ir B, galime nustatyti ir kitų juostos taškų naująją padėtį.
Brėžinyje taškais A' ir B' pažymėta, kur atsidūrė A ir B, kai buvo atliktas juostos judesys.



Dabar pamėginsime išsiaiškinti, kaip rasti kitų taškų padėtis. Laisvai pasirinkę tašką X pamėginsime nustatyti tašką X', į kurį jis persikels. Tai padarysime šitaip. Iš pradžių nubraižysime AX spindulio apskritimą su centru taške A'. Taškas X' turės priklausyti šiam apskritimui, kadangi X' nuo taško A' turi būti nutolęs tokiu pat atstumu kaip ir X nuo A. Toliau nubraižomas BX spindulio apskritimas su centru B'. Taškas X' priklausys ir šiam apskritimui, kadangi X' nuo taško B' turi būti nutolęs tokiu pat atstumu kaip ir X nuo B. Vadinasi, taškas X persikelia į šių dviejų nubrėžtųjų apskritimų sankirtos tašką. Kadangi abiejų apskritimų centrai yra ant to paties juostos krašto, tai pačioje juostoje gali būti tik vienas jų kirtimosi taškas. Šitaip įrodėme, jog žinant, kaip perkeliami du skirtingi kraštiniai juostos taškai A ir B, galima vienareikšmiškai nustatyti, kaip perkeliama ir visa juosta.
O dabar jau esame pasirengę įrodyti, kad bet koks juostos perkėlimas yra vieno iš šių penkių tipų judesys:

a) postūmis,
b) horizontalusis atspindys,
c) vertikalusis atspindys,
d) posūkis,
e) slenkamasis atspindys.

Kaip ką tik aptarėme, perkeliant juostą pakanka stebėti, kur perkeliami du vieno juostos krašto taškai A ir B. Sakysime, kad pasirinkome du tokius taškus, ir taškas B yra į dešinę nuo A. Perkėlus juostą, naująsias taškų padėtis pažymėsime A', B'. Galimi du atvejai:

A' ir B' liko ant to pat krašto, ant kurio buvo A ir B.
A' ir B' atsidūrė ant priešingo krašto nei A ir B.
Kiekvienoje iš šių situacijų taškas B' gali būti arba į dešinę, arba į kairę nuo A'. Tad iš viso, kaip parodyta lentelėje, galimi keturi skirtingi atvejai. Kiekvienas iš šių atvejų atitinka tam tikrą judesio tipą, bet čia reikia atkreipti dėmesį į tai, kad 3-iasis atvejis apima ir vertikalųjį, ir slenkamąjį atspindį.
Vadinasi, kaip buvo teigta 112 puslapyje, yra penki skirtingi juostos judesių tipai.

	B' yra į dešinę nuo A'	B' yra į kairę nuo A'
A' ir B' yra toje pačioje kraštinėje kaip ir A su B	**1 atvejis** Prieš judesį A B Postūmis Po judesio A' B' Tai yra *postūmis*	**2 atvejis** Prieš judesį Atspindžio ašis A B Po judesio B' A' Tai yra *vertikalusis atspindys*
A' ir B' yra priešingoje kraštinėje nei A ir B	**3 atvejis** Prieš judesį Atspindžio ašis A B Postūmis Po judesio A' B' Tai yra *slenkamasis atspindys.* Jei A' atsidurtų tiksliai virš A (brėžinyje būtų tiesiai po A), turėtume *horizontalųjį* atspindį	**4 atvejis** Prieš judesį . Centras A B Po judesio B' A' Tai yra *posūkis* (180° kampu)

6. Rūgštingumas



Apie ką pagalvojate išgirdę žodį „rūgštis“? Užsirašykite svarbiausias mintis. Prisiminkite keletą kasdieninių reiškinių, kaip nors susijusių su rūgštimis.

Papasakokite vienas kitam, ką užsirašėte.

Pamėginkite nusakyti keletą būdingų rūgšties ypatybių.

6.1. Rūgštys ir bazės

Prieš daugelį metų ežeruose knibždėte knibždėjo žuvų ir vėžių. Dabar jau taip nėra. Neretai ežero vanduo esti toks rūgštus, kad žuvys jame negali išgyventi. Kai skystis yra rūgštus, reiškia, kad jame yra rūgščių. Bet kas yra rūgštis?

Rūgštis yra molekulė ar jonas, galintis atiduoti vandenilio joną H^+.

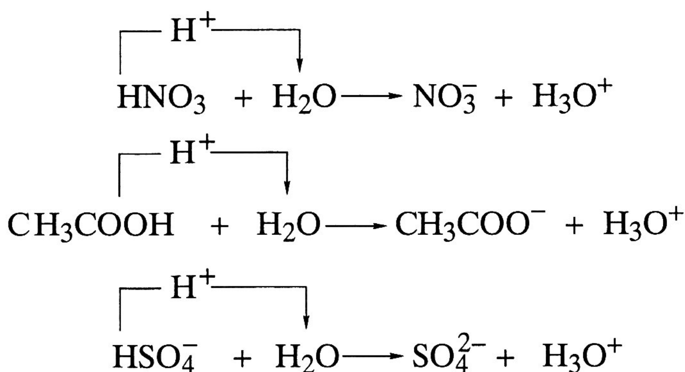
H^+ jonai negali egzistuoti laisvi – rūgštys H^+ jonus atiduoda kitoms molekulėms ar jonams, kurie gali juos prisijungti. Tokios medžiagos vadinamos bazėmis.

Bazė yra molekulė ar jonas, galintis prisijungti vandenilio joną H^+.

Tokį rūgščių ir bazių apibūdinimą pasiūlė danų chemikas N. Brionstedas (*N. J. Brønsted*, 1923).

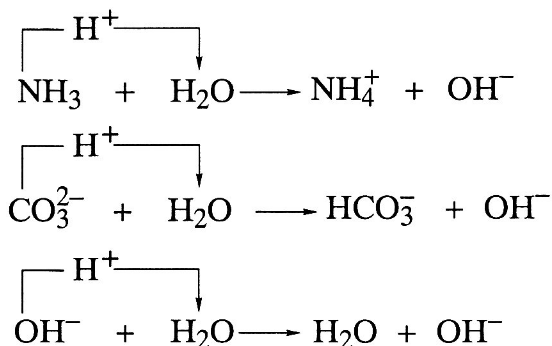
Rūgštys	Bazės	Neutralios medžiagos
Azoto rūgštis HNO_3	Amoniakas NH_3	Metanas CH_4
Acto rūgštis CH_3COOH	Karbonato jonas CO_3^{2-}	Alkoholis C_2H_5OH
Vandenilio sulfato jonas HSO_4^-	Hidroksido jonas OH^-	Natrio jonas Na^+

Kiekvienoje rūgštyje yra vandenilio (kaipgi kitaip jis galėtų atiduoti H^+ jonus), tačiau ne kiekviena medžiaga, turinti vandenilio, yra rūgštis. Patekus *rūgščiai į vandenį,* kai kurios rūgšties molekulės ar jonai atiduoda H^+ jonus tiesiai vandens molekulėms, kurios tokiu būdu virsta vadinamaisiais *hidroksonio jonais* H_3O^+:



Nemažai kasdieninių (buitinių) namų apyvokos priemonių yra rūgštys, pvz., druskos, citrinos, vyno rūgštis arba actas.

Patekus *į vandenį bazei,* kai kurios bazės molekulės ar jonai atplėšia nuo vandens molekulių H^+ jonus, ir šios virsta *hidroksido jonais* OH^-:



Paskutinėje reakcijoje, kaip regis, nieko nevyksta – kairė ir dešinė lygybės pusės yra vienodos! Šią lygtį reikia suprasti taip, kad OH^- jonai be paliovos atakuoja H_2O molekules, kurios dėl to suyra, ir taip susidaro naujų OH^- jonų.

601 602

Taip pat nemažai kasdieninių namų apyvokos priemonių yra bazės, pvz., soda, potašas, amoniako tirpalas.

Iš viso to išplaukia, kad vandeniniame rūgšties tirpale bus (perteklius) H_3O^+ jonų, ir kaip tik šie jonai rūgštiniam tirpalui suteikia būdingą rūgštų ar rūgštoką skonį. Juo didesnė H_3O^+ koncentracija, juo rūgštesnis skonis.

Vandeniniuose bazių tirpaluose esti (perteklius) OH^- jonų. Jie bazėms suteikia šarminį, pavyzdžiui, tokį kaip skalbiamojo muilo skonį.

Jei vandeniniame tirpale H_3O^+ ir OH^- jonų yra po lygiai, sakome, kad jis *neutralus.*

Nustatyti, ar tirpalas yra rūgštinis ar šarminis, galima, pavyzdžiui, vadinamuoju *lakmuso popierėliu* – sudrėkinus jį tuo skysčiu. Jei violetinis popierėlis *parausta*, skystis *rūgštus*; o jei *pamėlynuoja, – šarminis.*

Lakmuso popierėlis yra *indikatoriaus* pavyzdys, t. y. tokia medžiaga, kurios spalva rūgštiniame ir šarminiame tirpale skirtinga. Yra nemaža gamtinių indikatorių, keičiančių spalvą: žibuoklės, raudongūžiai kopūstai, aronijos, mėlynės ir kt.

Indikatorių pavyzdžiai		
Indikatorius	Rūgšti terpė	Šarminė terpė
Bromfenolio mėlynasis	Geltona	Mėlyna
Fenolftaleinas	Bespalvė	Raudona
Fenolio raudonasis	Geltona	Raudona
Lakmusas	Raudona	Mėlyna

Kaip minėta, daugumos rūgščių skonis esti rūgštus, o bazių dažniausiai „muiliškas“. Vis dėlto ragauti, norint nustatyti, ar medžiaga rūgštis, ar bazė – ne per geriausia išeitis! Mat rūgštys ir bazės gali labai graužti audinius. Bazei ar rūgščiai patekus ant odos ar gleivinės, reikia tučtuojau nuplauti tą vietą vandeniu. Ypač svarbu ilgai ir kruopščiai skalauti įtiškus į akis, kitaip gali pakenkti regėjimui. Bazės paprastai esti pavojingesnės nei rūgštys.

Kai kurios rūgštys ir bazės, leidžiamos naudoti maisto produktų gamyboje – kaip maisto priedai, yra pateiktos sąraše medžiagų, kurias šiandien priimta laikyti saugiomis naudoti.

Pavojingos žmonių sveikatai, degios, pavojingos aplinkai medžiagos žymimos specialiais ženklais. Pavojingų medžiagų sąraše yra ir rūgščių, ir bazių.


Nuodinga


Sprogi


Degi


Ypač degi


Ardanti


Dirginanti


Pavojinga aplinkai

ACTO RŪGŠTIS 70%

ARDANTI!
Saugokite nuo vaikų.
Stenkitės neįkvėpti garų.
Patekus į akis, būtina tuoj pat rūpestingai išplauti vandeniu ir kreiptis į gydytoją.

BŪKITE ATSARGŪS NAUDODAMI!





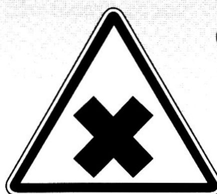



Akcinė bendrovė
„ACTITAS“
Tinka naudoti iki 200011

Dirbdami su acto rūgštimi, mūvėkite gumines pirštines.
BŪTINOJI PAGALBA:
Patekus į vidaus organus – praskalauti burną, gerti vandens ir nedelsiant kreiptis į gydytoją.
Patekus ant odos – gausiai plauti vandeniu.
Patekus į akis – skalauti drungnu vandeniu 15 minučių ir kreiptis į gydytoją.
Laikyti tamsioje vėsioje vietoje.

AMONIAKO TIRPALAS 25%

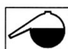
0,5 dm³



DIRGINANTIS

Dirgina akis, kvėpavimo takus ir odą.
Saugoti nuo vaikų, stengtis neįkvėpti garų, patekus į akis tuoj pat rūpestingai išplauti vandeniu ir kreiptis į gydytoją.

PIRMOJI PAGALBA
Patekus į vidaus organus – gerti daug vandens ir nedelsiant kreiptis į gydytoją. Patekus ant odos ir į akis – skalauti vandeniu ir nedelsiant kreiptis į gydytoją.



AB CHEMITA
Skaistagiris
Vilniaus raj.
Lietuvos Respublika
Tel.: (223) 322233



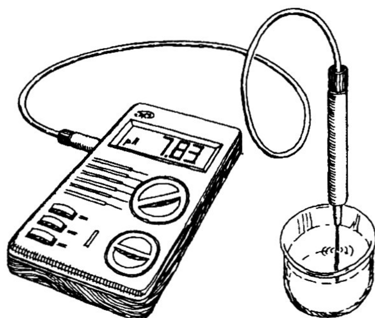
Tinka iki 189811 200103 Laikyti tamsioje vėsioje vietoje

Rūgštingumo rodiklis – pH

Tirpalo rūgštingumą nusako vadinamasis *pH rodiklis.*

Jei tirpalas neutralus (t. y. jei H^+ (ar H_3O^+) ir OH^- jonų yra po lygiai), pH yra lygus 7, jei rūgštus (H^+ jonų daugiau negu OH^-) – mažiau kaip 7, jei šarminis (OH^- jonų daugiau negu H^+) – daugiau kaip 7.

Tiesiogiai nustatyti tirpalo pH galima įvairiai – universaliuoju indikatoriniu popieriumi arba pH-metru.



Piešinėlyje pavaizduotas pH-metras su elektrodais. Įmerkus elektrodus į tiriamąjį tirpalą, prietaisas parodo skaičių, kuris ir yra to tirpalo pH.

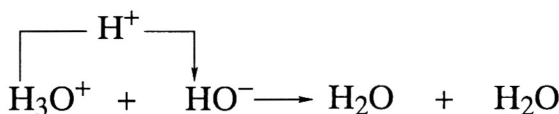
Kai kurių dažniausiai vartojamų buityje rūgščių ir šarmų pH vertės

	pH	
Rūgšti terpė	0	Praskiesta druskos rūgštis
	1	Skrandžio rūgštis
	2	Citrinos sultys
	3	Apelsinų sultys
	4	Pomidorų sultys
	5	Kava
	6	Lietaus vanduo
Neutrali →	7	Tyras vanduo
Šarminė terpė	8	Jūros vanduo
	9	Boraksas
	10	Dantų pasta
	11	10% amoniako tirpalas
	12	Pamuilės
	13	Kalkių pienas
	14	Natrio šarmas

605 606 607 608

6.2. Rūgščių ir bazių reakcijos

Sumaišius vandeninius rūgšties ir bazės tirpalus, hidroksonio jonai H_3O^+ reaguoja su hidroksido OH^- jonais ir susidaro vanduo:

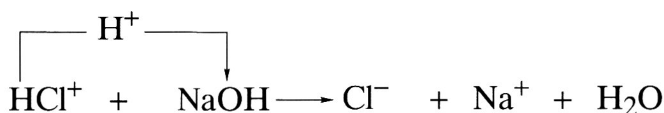


Sakoma, kad tirpalai vienas kitą *neutralizuoja,* nes ir rūgšties jonų (H_3O^+), ir bazės jonų (OH^-) sumažėja. Neutraliame tirpale jų yra labai mažai ir po lygiai (tik viena iš 500 mln. vandens molekulių neutraliame tirpale yra suskilusi į jonus). O sumaišius tą patį skaičių H_3O^+ ir OH^-

molių, rūgštingumas ir šarmingumas visai susikompensuoja. Neutralizaciją galima stebėti iš pat pradžių į tirpalą įpylus indikatoriaus – pakitus indikatoriaus spalvai, matyti, kada tirpalas tapo neutralus.

Pavyzdys

Druskos rūgštį HCl(v.t.) galima neutralizuoti, pavyzdžiui, įbėrus reikiamą kiekį natrio hidroksido (NaOH):

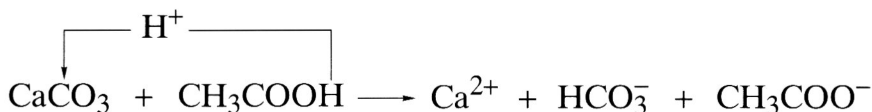


Turėję stiprią rūgštį ir stiprų šarmą, gavome neutralų valgomosios druskos NaCl(v.t.) tirpalą.

609

Pavyzdys: Nukalkinimas

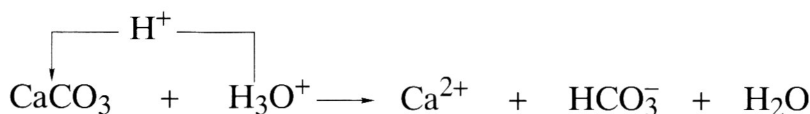
Kalkių apnašas, tarkim, kavos aparate ar ant plytelių vonioje galima pašalinti, pavyzdžiui, praskiesta acto rūgštimi CH_3COOH. Kalkės $CaCO_3$ sunkiai tirpsta vandenyje, tačiau tirpsta rūgštyse:



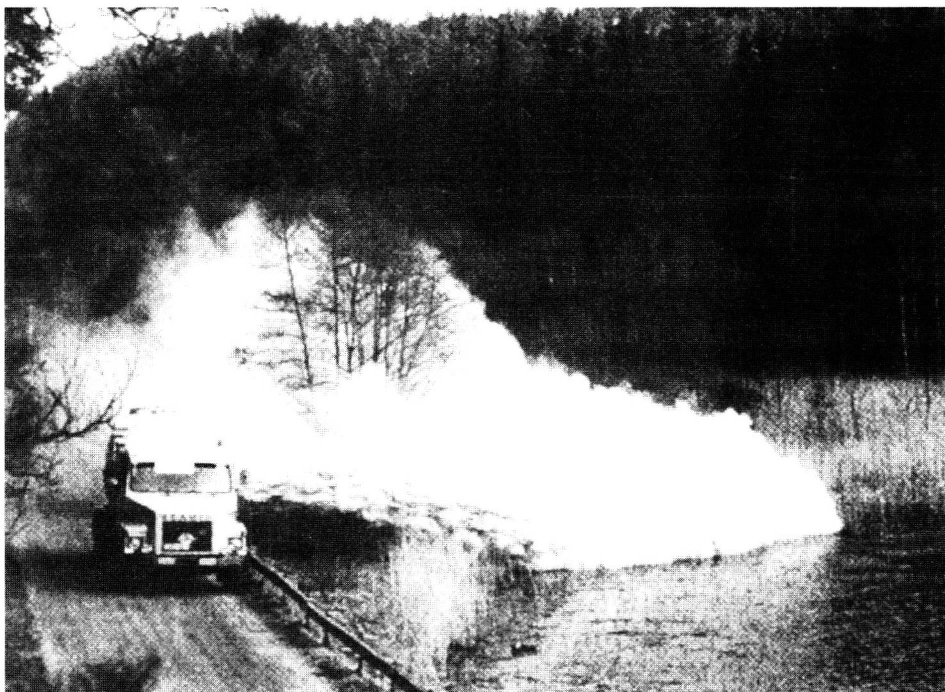
Taigi galutinis produktas čia – vandeninis jonų Ca^{2+}, HCO_3^- ir CH_3COO^- tirpalas. Jungtys tarp šių jonų silpnos, tad acto rūgštyje ištirpo sunkiai tirpstančios kalkės $CaCO_3$, kurias galime nuplauti.

Pavyzdys: Kalkės gali neutralizuoti rūgštį

Ežeruose dėl oro taršos ištirpsta nemažai rūgščių. Danijoje ši problema ne tokia opi, nes gruntiniuose vandenyse daug kalkių $CaCO_3$, o šias, kaip aprašyta praeitame pavyzdyje, rūgštys tirpina „sunaudodamos" H_3O^+ jonus:



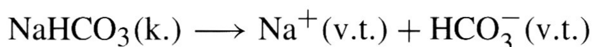
Taigi čia matyti, jog šalindamos H_3O^+ jonus, kalkės mažina rūgštingumą. Rūgštėjančiame ežero vandenyje mažėja žuvų. Rūgščiose dirvose blogai auga žemės ūkio kultūros. Lietuvoje rūgščios dirvos paprastai kalkinamos.



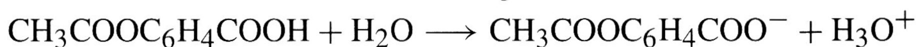
Užkirsti kelią ežerų ir upelių rūgštėjimui galima kalkinimu. Fotografijoje nuo užrūgštėjusio ežero kranto purškiami kalkių milteliai. Bet tai tik laikinas sprendimas – kas keleri metai reikia kartoti; o ir tai sukelia padarinių gamtai. Lietuvoje ežerai nekalkinami.

Pavyzdys: Šnypščiančiosios tabletės

Kai kurių tablečių nuo galvos skausmo aktyvioji medžiaga yra *acetilsalicilo rūgštis* ($CH_3COOC_6H_4COOH$). Tai kieta medžiaga, tabletėse sausai sumaišyta, pavyzdžiui, su natrio vandenilio karbonatu $NaHCO_3$. Kol sausa, joje niekas nevyksta. Tačiau įmetus tabletę į vandenį, ji ima tirpti, ir ją sudarančios medžiagos iš dalies suskyla į jonus:

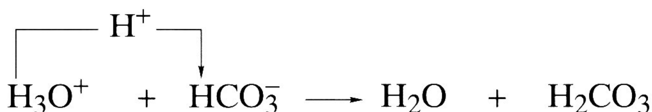


$$NaHCO_3(\text{k.}) \longrightarrow Na^+(\text{v.t.}) + HCO_3^-(\text{v.t.})$$



$$CH_3COOC_6H_4COOH + H_2O \longrightarrow CH_3COOC_6H_4COO^- + H_3O^+$$

O tuomet gali įvykti tokia rūgštinė–bazinė reakcija:

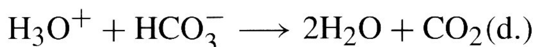


Susidaręs junginys H_2CO_3 vadinamas *anglies rūgštimi.* H_2CO_3 molekulės labai nestabilios ir skyla į H_2O bei CO_2:



$$H_2CO_3 \longrightarrow H_2O + CO_2(\text{d.})$$

Tos rūgštinės–bazinės reakcijos galutinis rezultatas yra toks:



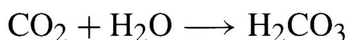
$$H_3O^+ + HCO_3^- \longrightarrow 2H_2O + CO_2(\text{d.})$$

Taigi išsiskiria anglies dioksidas CO_2, kuris burbuliukais kyla į viršų, ir girdėti šnypštimas. O stiklinėje, be kita ko, lieka acetilsalicilato jonų ($CH_3COOC_6H_4COO^-$), kurie, iš visko sprendžiant, išgydo galvos skausmą.

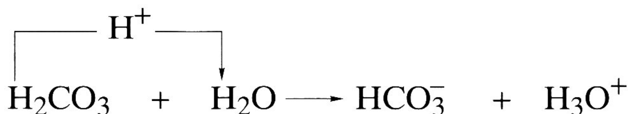
Pavyzdys: Iš kur gruntiniame vandenyje kalkės?

Smulkūs žemėje gyvenantys gyvūnai, kaip antai kirmėlės ir vabalai, kvėpuoja taip pat kaip ir žmogus – t. y. įkvepia deguonį (O_2), o iškvepia anglies dioksidą (CO_2).

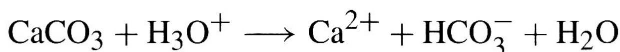
Pro žemės sluoksnius prasisunkiantis lietaus vanduo dalį šio CO_2 ištirpina ir juo giliau (juo didesnis slėgis), juo daugiau vandenyje gali ištirpti CO_2. Taip susidaro H_2CO_3 (anglies rūgštis), ir vanduo tampa silpnai rūgštus:



$$CO_2 + H_2O \longrightarrow H_2CO_3$$



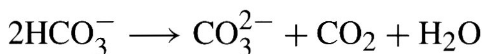
Grunte yra kalkių ($CaCO_3$), kurios sunkiai tirpsta gryname vandenyje, tačiau gali tirpti rūgštyje:



$$CaCO_3 + H_3O^+ \longrightarrow Ca^{2+} + HCO_3^- + H_2O$$

Dėl šios reakcijos gruntiniame vandenyje atsiranda ir kalcio Ca^{2+}, ir vandenilio karbonato HCO_3^- jonų. Pakilus vandens temperatūrai

(karšto vandens vamzdžiuose, kavos aparate, skalbimo mašinoje), vandenilio karbonato jonai skyla į karbonato jonus, anglies dioksidą ir vandenį:



$$2HCO_3^- \longrightarrow CO_3^{2-} + CO_2 + H_2O$$

Karbonato jonai CO_3^{2-} jungiasi su kalcio jonais Ca^{2+}, ir taip vėl susidaro sunkiai tirpstančios kalkės ($CaCO_3$), kurios ir sudaro kalkių apnašas.

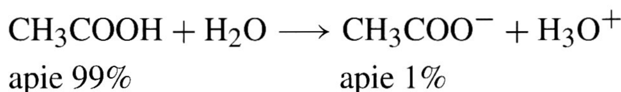
Stiprios rūgštys ir bazės

Rūgščių gebėjimas atiduoti vandeniui H^+ jonus esti įvairus – priklauso nuo rūgšties. *Stiprios rūgšties* kone visos molekulės ar jonai atiduoda po H^+ joną, o *silpnos rūgšties* su vandens molekulėmis reaguoja tik maža dalis molekulių ar jonų.

Pavyzdžiui, azoto rūgštis HNO_3 yra stipri rūgštis, tad vandeniniame azoto rūgšties tirpale HNO_3 molekulių beveik nėra – visos būna virtusios H_3O^+ bei NO_3^- jonais.

Acto rūgštis CH_3COOH yra silpna rūgštis. Paprasčiausio namų ūkyje vartojamo acto (vandeninio acto rūgšties tirpalo) tik apie 1% molekulių būna atidavusios H^+ joną.

Vadinasi, namų ūkyje maistui vartojamame acte kur kas daugiau CH_3COOH molekulių nei acetato (CH_3COO^-) ir hidroksonio (H_3O^+) jonų:

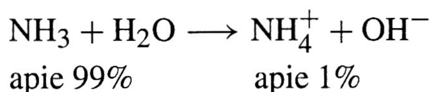


$$\underset{\text{apie 99\%}}{CH_3COOH} + H_2O \longrightarrow \underset{\text{apie 1\%}}{CH_3COO^-} + H_3O^+$$

Bazių gebėjimas iš vandens paimti H^+ jonus esti įvairus – priklauso nuo bazės. *Stipri bazė* H^+ jonus nuo vandens molekulių atplėšia nesunkiai. Natrio hidroksidas NaOH (natrio šarmas) yra stiprios bazės pavyzdys. Kone visos šios bazės molekulės ar jonai prisijungia po H^+ joną, o *silpnų bazių* su vandens molekulėmis reaguoja tik maža dalis molekulių ar jonų.

Pavyzdžiui, amoniakas yra silpna bazė. Ištirpintas vandenyje amoniakas NH_3 vadinamas amoniakiniu vandeniu. Apie 1% tokio tirpalo NH_3 molekulių prisijungia po H^+ joną, sudarydamos NH_4^+ bei OH^-.

Taigi tokiame tirpale būna kur kas daugiau NH_3 molekulių nei NH_4^+ ir OH^- jonų:

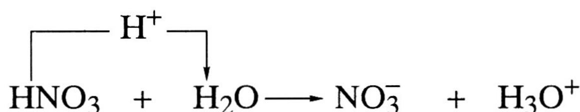


$$NH_3 + H_2O \longrightarrow NH_4^+ + OH^-$$
apie 99% apie 1%

Tačiau rūgštumas priklauso nuo to, kiek yra H_3O^+ jonų. Įlašinę lašelį koncentruotos sieros rūgšties į pilną vonią vandens, gausime mažiau rūgštų tirpalą nei mamos su actu sutaisytos silkės užpilas.

Vanduo – tai ir rūgštis, ir bazė

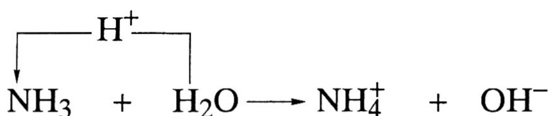
Iš reakcijos lygties



$$HNO_3 + H_2O \longrightarrow NO_3^- + H_3O^+$$

aišku, kad vanduo yra *bazė.*

Iš reakcijos lygties

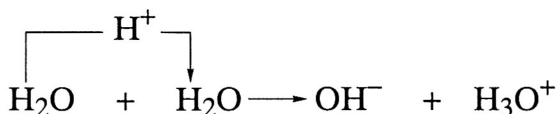


$$NH_3 + H_2O \longrightarrow NH_4^+ + OH^-$$

aišku, kad vanduo yra *rūgštis.*

Vanduo yra ir rūgštis, ir bazė! Vis dėlto vanduo labai silpna rūgštis ir labai silpna bazė.

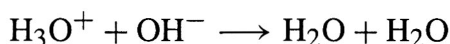
Tik labai maža dalis (apie 2 iš kiekvieno milijardo) gryno vandens molekulių reaguoja vienos su kitomis:



$$H_2O + H_2O \longrightarrow OH^- + H_3O^+$$

Vadinasi, net ir gryname vandenyje yra ir H_3O^+, ir OH^- jonų! Ir kiekvienų po lygiai.

Pastarąją lygtį palyginus su jau minėtąja 124 puslapyje

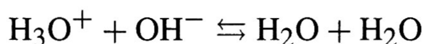


$$H_3O^+ + OH^- \longrightarrow H_2O + H_2O$$

kaip matyti, kyla prieštaravimas. O tiesa čia ta, kad nuolatos vyksta abi šios reakcijos, ir dalis molekulių virsta jonais, dalis jonų susijungę sudaro

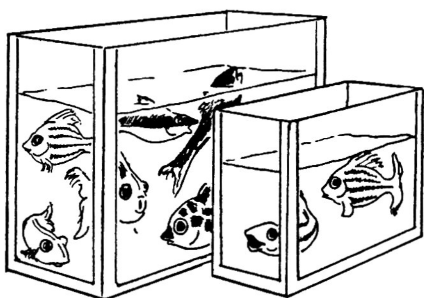
9. 936

vandens molekules. Visa tai vyksta taip, kad nusistovi pusiausvyra – t. y. bendras molekulių ir bendras jonų skaičius nekinta. Norint parodyti, kad reakcija vyksta abiem kryptimis (ir kad taip nusistovi pusiausvyra), rašoma į abi puses nukreiptos strėliukės:

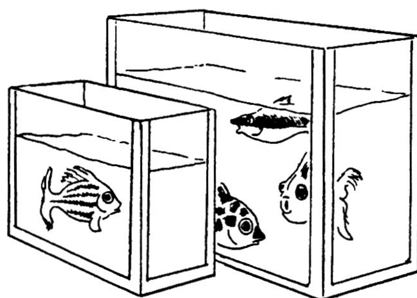


$$H_3O^+ + OH^- \leftrightarrows H_2O + H_2O$$

6.3. Kaip matuojama koncentracija



Šiuose dviejuose akvariumuose žuvų koncentracija vienoda. Ji didelė.



Šiuose dviejuose akvariumuose žuvų koncentracija vienoda. Ji maža.

Dažnai cheminės medžiagos esti ištirpusios vandenyje. Jų tirpalai gali būti daugiau ar mažiau koncentruoti. Chemikų dažniausiai vartojamas koncentracijos matas yra *medžiagos kiekio koncentracija.*

Medžiagos kiekio koncentracija tirpale yra 1 litre paruošto tirpalo esantis tos medžiagos molių skaičius.

Medžiagos kiekio koncentracijos vienetas yra mol/ℓ, sutrumpintai M. Taigi

$$1 \text{ molis ištirpintas } 1\ell \text{ tirpalo} = 1 \text{ mol}/\ell = 1\text{M}.$$

Jei ant buteliuko su chemikalais parašyta, pavyzdžiui, 2M, tai reiškia, jog koncentracija jame yra 2 moliai/ℓ, arba, kitaip tariant, kad litre to tirpalo yra 2 moliai medžiagos.

Toliau, užuot sakę „medžiagos kiekio koncentracija", dažniausiai tiesiog sakysime „koncentracija". Chemijos literatūroje galima aptikti ir senesnį medžiagos kiekio koncentracijos pavadinimą, būtent – *molinė koncentracija.*

Pavyzdys

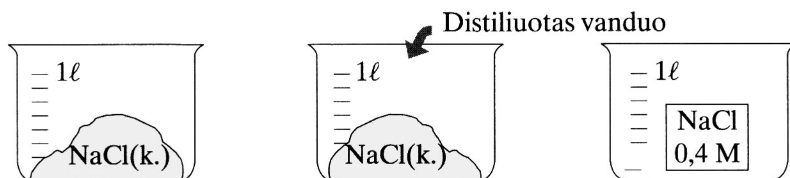
Kiek reikia gramų natrio chlorido NaCl, norint pagaminti 1 litrą 0,4M koncentracijos tirpalo?

Pirmiausia randame NaCl molinę masę: $22{,}99 + 35{,}45 = 58{,}44$ g.

1 molio NaCl masė yra 58,44 g.

0,4 molio NaCl masė bus $0{,}4 \cdot 58{,}44 = 23{,}38$ g.

Taigi norint pagaminti 0,4 molinės koncentracijos NaCl tirpalą, reikia pasverti 23,38 g NaCl, suberti jį į matavimo stiklinę ir pilti distiliuoto vandens, kol ištirpus NaCl, tirpalo lygis pasieks 1 litro padalą.



610 611 612 613 614 615

Chemikalų ribinės vertės

Kad būtų galima įvertinti, ar gresia pavojus išpylus chemikalus ar jiems ištekėjus, įvestos vadinamosios *ribinės vertės*. Ribinė vertė nurodo maksimalią leistiną dujinio būvio chemikalo *koncentraciją*.

Dujinio būvio medžiagos koncentracija dažnai matuojama vienetais m.d. (milijonosios dalys). Milijonosios dalys yra kaip procentai, tik čia skaičiuojama ne šimtosiomis, o milijonosiomis dalimis. Jei pavyzdžiui, spirito garų koncentracija patalpoje ar inde yra 2 m.d., tai reiškia, kad spirito molekulės sudaro dvi milijonąsias dalis visų molekulių toje erdvėje. Tad iš kiekvieno milijono tokio oro molekulių dvi molekulės bus spirito. Lygiai kaip trupmeninę dalį paverčiame procentais, padauginę iš 100%, taip trupmeninę dalį paverčiame m.d., padauginę iš 10^6 m.d. Kai kada rašoma ppm (anglų k. – *part per million*).

Lentelėje pateiktos kai kurių dažniau naudojamų chemikalų ribinės vertės.

Medžiaga	Ribinė vertė (m.d.)
Alkoholis (spiritas)	1000
Eteris (narkozės priemonė)	400
Acetonas (nagų lako valiklis)	250
Amoniakas (valiklis)	25
Anglies tetrachloridas (dėmių valiklis)	2
Formaldehidas (drožlių plokštėms)	1
Ozonas (kopijavimo aparatuose)	0,1

Išgaravusios medžiagos koncentraciją (ppm ar m.d. vienetais) galima rasti šitaip: pirmiausia apskaičiuojama, kiek molių oro (n_{oro}) yra toje patalpoje, kurioje išgaravo ar išsipylė skystis; po to apskaičiuojama, kiek molių ($n_{medž}$) išgaravo pačios medžiagos; galiausiai randamas išgaravusios medžiagos ir oro kiekių santykis; o tuomet šis santykis (trupmena) paverčiamas m.d.:

$$\text{koncentracija} = \frac{n_{medž}}{n_{oro}} \cdot 10^6 \text{ ppm.}$$

Pavyzdys

Sakykime, kad 200 m^3 tūrio mokyklos laboratorijoje ant grindų nukrito cheminė stiklinė su koncentruotu amoniakiniu vandeniu.

Pirmiausia rasime, kiek toje patalpoje yra molių oro. Kadangi kiekviename kubiniame metre (m^3) yra 1000 litrų oro, o 1 mol oro tūris normaliomis sąlygomis, t. y. esant 20 °C ir 1 atm. slėgiui, yra 24 litrai, tai viso oro kiekis moliais bus:

$$n_{oro} = \frac{200\,000}{24} = 8333.$$

Dabar reikia išsiaiškinti, kiek molių išgaravo amoniako (NH_3). Tarkime, cheminė stiklinė buvo 20 mℓ talpos. Koncentruoto amoniakinio vandens tankis 0,90 g/mℓ, kur pagal masę amoniakas sudaro 25% (likę 75% – vanduo). Todėl to amoniakinio vandens masė $20 \cdot 0{,}90$ g $= 18$ g, iš kurių ketvirtis yra išgaravęs amoniakas. Vadinasi, išgaravo $18/4 = 4{,}5$ g gryno amoniako.

Pagaliau išgaravusio amoniako masę paverskime moliais. Tam pasinaudosime molinėmis masėmis, pateiktomis periodinėje cheminių elementų lentelėje:

$$1 \text{ molio } NH_3 \text{ masė: } 1 \cdot 14{,}01 \text{ g} + 3 \cdot 1{,}01 \text{ g} = 17{,}04 \text{ g.}$$

Todėl išgaravusio amoniako kiekis moliais bus toks:

$$n_{medž} = 4{,}5/17{,}04 = 0{,}26 \text{ (mol).}$$

O tuomet koncentracija m.d. bus tokia:

$$\frac{n_{medž}}{n_{oro}} \cdot 10^6 \text{ m.d.} = \frac{0{,}26}{8333} \cdot 10^6 \text{ m.d.} = 31 \text{ m.d.}$$

Taigi ar yra dėl ko nerimauti? Amoniako ribinė vertė lentelėje yra 25 m.d., tad riba čia peržengta, ir todėl patalpą privalu nedelsiant gerai išvėdinti.

6.4. Rūgščių ir bazių titravimas

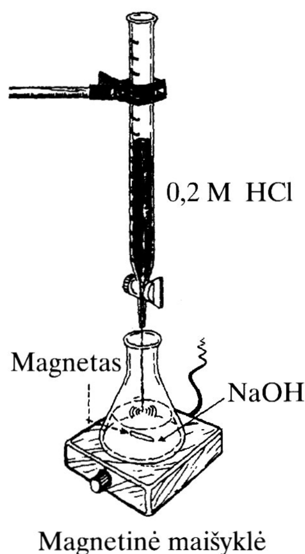
Titravimas – tai analizės metodas, kuomet lašinama, pavyzdžiui, žinomos koncentracijos bazė į tam tikrą kiekį tiriamosios rūgšties. Rūgštis ir bazė reaguoja, rūgščiai atiduodant H^+ jonus bazei. Kai rūgštis visus H^+ jonus būna atidavusi, t. y. kai tirpalas tampa neutralus, nustojama lašinti. Kad būtų galima matyti, kada tai įvyksta, įlašinama indikatoriaus, kuris tirpalui virstant iš rūgštinio baziniu, pakeičia spalvą.

Pavyzdys: Rūgščių ir bazių titravimas

Nustatysime NaOH tirpalo koncentraciją, titruodami su 0,2 molinės koncentracijos HCl.

Į kūginę kolbą įpilama 25,0 mℓ NaOH tirpalo ir įlašinama keli lašai bromfenolio mėlio, dėl ko tirpalas pamėlynuoja (šarminės terpės spalva). Iš biuretės į kūginę kolbą lašinamas HCl, kol tirpalo spalva kolboje pasikeičia iš mėlynos į geltoną (rūgštinės terpės spalva). Pagal biuretės padalas nustatome, kad išlašėjo 15,0 mℓ HCl tirpalo.

Dabar galime apskaičiuoti, kiek titravimui suvartota molių HCl, o kartu ir sužinosime, kiek molių tuose 25 mℓ tirpalo buvo NaOH, nes 1 molis HCl neutralizuoja lygiai 1 molį NaOH:



Magnetinė maišyklė



$$1\text{NaOH} + 1\text{HCl} \longrightarrow \text{NaCl} + \text{H}_2\text{O}$$

Taigi sunaudota HCl molių: $0{,}20 \text{ mol}/\ell \cdot 0{,}015\ \ell = 0{,}003$ mol. Vadinasi, tuose 25 mℓ NaOH tirpalo buvo taip pat 0,003 mol medžiagos. 25 mℓ NaOH tirpalo yra 0,003 mol NaOH, tai 1000 mℓ NaOH tirpalo bus 40 kartų daugiau medžiagos:

$$n_{\text{NaOH}} = 40 \cdot 0{,}003 = 0{,}12 \text{ mol}$$

Vadinasi, NaOH tirpalo koncentracija yra 0,12M (0,12 mol/ℓ).

617 618 619

6.5. pH sąvokos patikslinimas

Jau buvo minėta, kad neutralaus tirpalo pH = 7, rūgštinio tirpalo pH < 7, o bazinio pH > 7. Taip pat buvo nurodyti eksperimentiniai pH verčių nustatymo metodai (universaliuoju indikatoriniu popieriumi, pH-metru).

Bet kodėl gi chemikai lūžio tašku pasirinko būtent skaičių 7, ir ką tai reiškia, kai tirpalo pH yra, pavyzdžiui, 5?

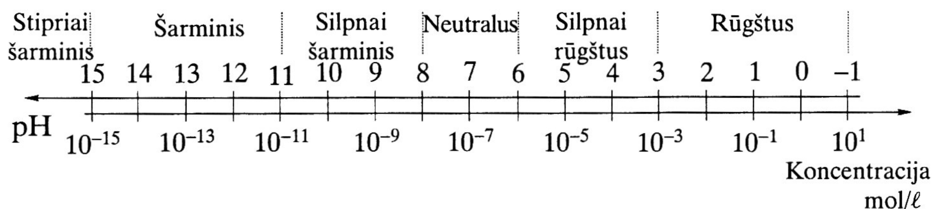
pH sąvoką įvedė danų biochemikas Siorensenas (*S. P. L. Sørensen*, 1886–1939). Jis pasirėmė tuo, kad H_3O^+ jonų koncentracija gryname vandenyje yra $1{,}0 \cdot 10^{-7}$ mol/ℓ (esant 25°C).

Štai čia ir atsirado tas skaičius 7!

Rūgštiniame tirpale H_3O^+ jonų koncentracija yra *didesnė* kaip $1{,}0 \cdot 10^{-7}$ mol/ℓ, pavyzdžiui, $1{,}0 \cdot 10^{-5}$ mol/ℓ, ir tokiu atveju šiam tirpalui priskiriame pH vertę 5.

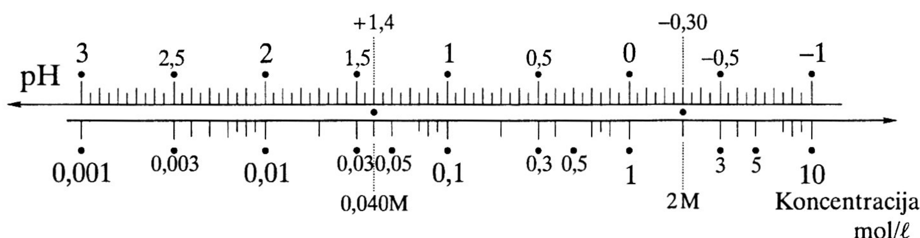
Baziniame tirpale H_3O^+ jonų koncentracija yra *mažesnė* kaip $1{,}0 \cdot 10^{-7}$ mol/ℓ, pavyzdžiui, $1{,}0 \cdot 10^{-8}$ mol/ℓ, ir tokiu atveju šiam tirpalui priskiriame pH vertę 8.

Sąryšis tarp vandeninio tirpalo pH vertės ir H_3O^+ jonų koncentracijos



Atkreipkite dėmesį, kad jonų koncentracija didėja išilgai x ašies einant į dešinę, o pH didėja einant į kairę! Pavyzdžiui, iš skalės matyti, jog kai pH = 13, tai H_3O^+ jonų koncentracija yra $1{,}0 \cdot 10^{-13}$ mol/ℓ.

Žemiau pateiktas smulkesnis tos skalės fragmentas. Juo galima naudotis rūgščios terpės pH nustatyti, kai žinoma H_3O^+ koncentracija, ir atvirkščiai.



Pavyzdys: Praskiestos druskos rūgšties ir azoto rūgšties pH nustatymas

Ir druskos, ir azoto rūgštis yra stiprios rūgštys. Vandeniniame tirpale jos atiduoda vandeniui visus savo H^+ jonus. Todėl H_3O^+ jonų tokiame tirpale bus tiek, kiek jame yra ištirpusių rūgšties molekulių. Pavyzdžiui, jei turime 2M druskos rūgštį, tai reiškia, jog H_3O^+ koncentracija joje yra 2 mol/ℓ. Iš prieš tai pateiktos skalės randame $pH = -0{,}30$.
Norėdami pagaminti $pH = 1{,}4$ rūgštingumo druskos rūgšties tirpalą, žiūrime į skalę ir matome, kad H_3O^+ jonų koncentracija tokiame tirpale turi būti 0,040 mol/ℓ. Tai reiškia, kad 1 litre tirpalo turi būti ištirpę 0,040 mol HCl. Tokį tirpalą galima pagaminti paėmus 2M druskos tirpalo ir praskiedus jį $2/0{,}04 = 50$ kartų. Tai galima padaryti šitaip:



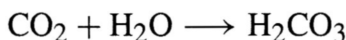
Pipete įtraukiama 1 mℓ 2M HCl tirpalo. Šis rūgšties kiekis išleidžiamas į matavimo stiklinę su distiliuotu vandeniu. Tuomet distiliuoto vandens papildoma iki 50 mℓ žymės.

Pastaba. Čia pateiktas būdas nustatyti stiprių rūgščių pH netinka silpnoms rūgštims. Vadinasi, išmatavę 0,1M acto rūgšties pH vertę, gautume ne $pH = 1$, o apie 3, ir tai atitinka 0,001M H_3O^+ jonų koncentraciją. Taigi acto rūgštis vandeniui būna atidavusi tik apie 1% savo H^+ jonų.

Pavyzdys
Skrandžio sultys yra rūgščios dėl natūraliai skrandyje išsiskiriančių druskos rūgščių. Tuščiame skrandyje esti išsiskyrę apie 25 mℓ 0,1M druskos rūgšties. Pagal skalę tai atitinka $pH = 1$ rūgštingumą. Gerdami ar valgydami pripildome skrandį maždaug 1 litro skysčio, ir ta druskos rūgštis prasiskiedžia apie 40 kartų. Taigi druskos rūgšties koncentracija sumažėja iki 0,0025M, ir tuomet pagal skalę pH skrandyje būna apie 2,6.
Paprastai pH vertė skrandyje esti nuo 1 iki 3. O padidėjus rūgštingumui, raugėjama arba „ėda rėmuo“.

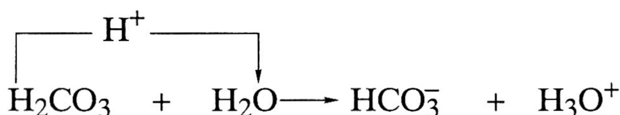
6.6. Rūgštieji lietūs

Priešingai nei esame linkę manyti, tyras, visiškai *neužterštas* lietaus vanduo nėra neutralus, o silpnai rūgštus! Taip yra dėl to, kad lietaus vanduo iš oro paima anglies dioksido CO_2 ir susidaro H_2CO_3:



$$CO_2 + H_2O \longrightarrow H_2CO_3$$

Anglies rūgštis yra silpna rūgštis, tad kai kurios H_2CO_3 molekulės reaguoja su vandeniu:



$$H_2CO_3 + H_2O \longrightarrow HCO_3^- + H_3O^+$$

Tai reiškia, kad net ir visiškai tyro lietaus vandens pH vertė yra mažiau nei 7, o tiksliau – 5,7. Užterštas lietus, kurio vandens pH mažesnis už „natūralią" 5,7 vertę, vadinamas *rūgščiuoju lietumi.*

Per pastaruosius 50 metų vidutinė metinė kritulių pramoniniame pasaulyje pH vertė tapo daug mažesnė už 5,7 (būtent, apie 4).

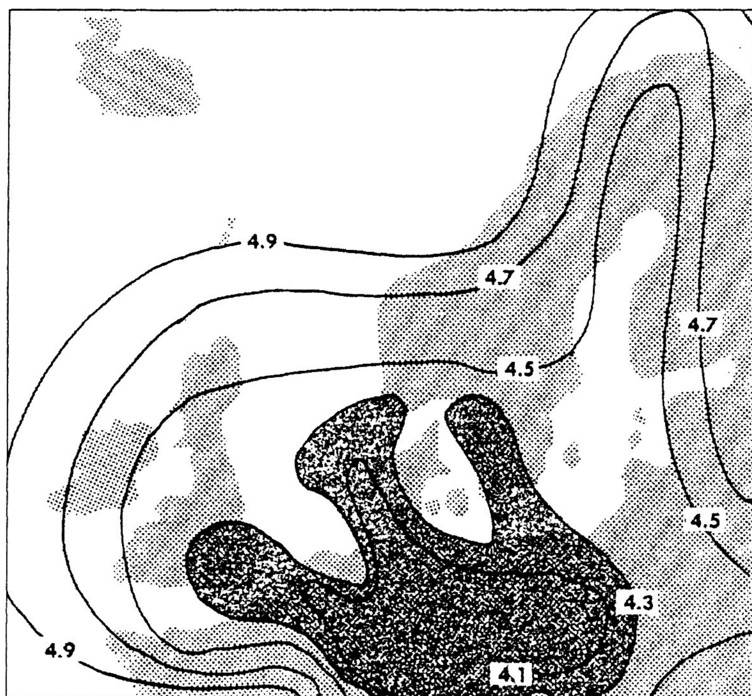
Danijoje lietaus vandens atviroje vietoje pH yra apie 4,3, o jei vanduo surinktas po medžiais, tai pH esti mažesnis, nes ant medžių lapų būna nusėdusių teršalų bei nuo praeito rūgščiojo lietaus likusių rūgščių, kurių dalis su lietumi nuplaunama.

Lietuvoje lietaus vandens pH vertė būna įvairi ir labiausiai priklauso nuo to, iš kur pučia vėjas. Didžiausias teršėjas sieros oksidais yra Elektrėnų šiluminė elektrinė. Tačiau kur kas daugiau teršalų, ypač azoto oksidų, išmeta automobiliai.

Kas primaišo rūgščių į lietaus vandenį?

Lietaus vandens parūgštėjimą per pastaruosius dešimtmečius visų pirma lemia padidėję jame sulfitinės rūgšties (H_2SO_3), sieros rūgšties (H_2SO_4) ir azoto rūgšties (HNO_3) kiekiai.

Daugiausia šių rūgščių susidaro deginant elektrinėse, pramonėje bei skysto kuro katiluose iškastinį kurą (*iškastinis kuras* – tai anglis ir nafta), taip pat (ir labai daug!) iš automobilių išmetamųjų dujų. Verta įsidėmėti, kad bet kokiu būdu vartodami elektros energiją (tarkim, žiūrėdami televizorių), prisidedame prie oro taršos didinimo – tiek anglies dioksidu CO_2, tiek ir rūgščiaisiais lietumis. Tas pat nutinka, kai važiuojama automobiliu.

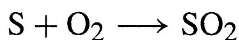


Rūgštieji lietūs Europoje: kreivės rodo kritulių pH verčių ribas.

Gamtos produktuose naftoje ir anglyje yra įvairių sieros ir azoto junginių, kurie, degant tokiam kurui, reaguoja su ore esančiu deguonimi, ir taip susidaro *sieros dioksidas* SO_2 bei *azoto oksidas* NO.

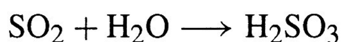
O šioms dujoms patekus į atmosferą, parūgštėja lietaus vanduo. Vėliau išsamiau paaiškinsime, kaip tai vyksta.

Degant iškastiniam kurui, jame esanti siera reaguoja su ore esančiu deguonimi, ir susidaro sieros dioksidas:



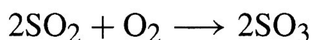
$$S + O_2 \longrightarrow SO_2$$

Sieros dioksidas lengvai tirpsta vandenyje ir, jam ištirpus lietaus vandenyje, susidaro sulfitinė rūgštis:



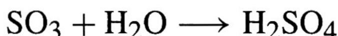
$$SO_2 + H_2O \longrightarrow H_2SO_3$$

Tačiau SO_2 taip pat gali ir toliau reaguoti su ore esančiu deguonimi, prisijungdamas dar vieną O atomą:



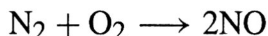
$$2SO_2 + O_2 \longrightarrow 2SO_3$$

O susidariusios SO_3 molekulės tuoj pat jungiasi su atmosferos ore esančiomis vandens molekulėmis, ir susidaro sieros rūgštis H_2SO_4:



$$SO_3 + H_2O \longrightarrow H_2SO_4$$

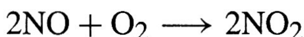
Degant iškastiniam kurui, azotas, kaip ir siera, reaguoja su ore esančiu deguonimi, sudarydamas azoto oksidus NO_x (x gali būti lygus 1 ar 2). Aukštoje degimo temperatūroje taip pat gali susidaryti NO, tiesiogiai su deguonimi reaguojant ir natūraliai ore esančiam azotui (N_2):



$$N_2 + O_2 \longrightarrow 2NO$$

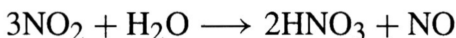
Taigi nors gamtinėse dujose ir nėra azoto junginių, ir tik labai nedaug sieros, bet joms degant vis dėlto gali susidaryti NO. Tad iš kaminų rūkstančiuose dūmuose ir automobilių išmetamosiose dujose (jei nieko nedaroma) esti azoto oksido NO.

Atmosferoje NO reaguoja su O_2 ir susidaro azoto dioksidas NO_2:



$$2NO + O_2 \longrightarrow 2NO_2$$

Tuomet ištirpus lietaus vandenyje NO_2, susidaro azoto rūgštis HNO_3:



$$3NO_2 + H_2O \longrightarrow 2HNO_3 + NO$$

(Išsiskiriantis NO gali toliau reaguoti su O_2, sudarydamas NO_2, kuris savo ruožtu dar pagausina azoto rūgštį.)

Be sulfitinės, sieros ir azoto rūgščių, rūgščiame lietaus vandenyje būna dar ir nedidelis kiekis druskos rūgšties HCl. Druskos rūgštis juose atsiranda, be kita ko, ir deginant plačiai naudojamą medžiagą polivinilchloridą (PVC). PVC sudaro ilgos anglies, vandenilio ir chloro grandinės. Jo degimo reakciją galima užrašyti šitaip (lygtis neišlyginta):



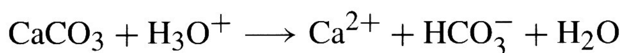
$$PVC + O_2 \longrightarrow HCl + CO_2 + H_2O$$

PVC naudojamas elektros laidų izoliacijai, lietvamzdžiams, grindų dangoms, plastiko plėvelei bei plastiko tarai gaminti. O kadangi PVC taip plačiai taikomas įvairiose srityse, tai, žinoma, dažnai gaminius iš jo tenka išmesti. Šis panaudotas PVC deginamas didelėse degyklose, o tai reiškia, kad krituliuose apie tokias degyklas gali būti ypač daug HCl.

Žalingas rūgščiųjų lietų poveikis

Rūgštieji lietūs kenkia ir gamtai, ir statiniams. Ežerai ir upeliai ilgainiui tampa rūgštūs, t. y. jų vandens pH sumažėja, o tai kenkia žuvims bei augalams. Žuvys geriausiai jaučiasi, kai pH didesnis kaip 5, o nukritus pH vertei žemiau 3, žūsta. Daugumos mokslininkų nuomone, rūgštieji krituliai yra ir vis didėjančio (ypač spygliuočių) medžių nykimo (miškų džiūvimo) priežastis. Medžių šaknis, lapus ar spyglius pažeidžia rūgščios iškrintančių teršalų dalelės (žr. spalvotą įkliją).

Statiniai ir statulos iš marmuro ar smiltainio dėl rūgščiųjų lietų per pastaruosius 30 metų apgedo labiau nei per visus praėjusius 300. Taip yra, be kita ko, dėl to, kad rūgštieji lietūs ardo smiltainį bei smiltainyje esantį $CaCO_3$. Patekus ant statinio rūgščiojo lietaus vandens, vyksta tokia reakcija:



$$CaCO_3 + H_3O^+ \longrightarrow Ca^{2+} + HCO_3^- + H_2O$$

Tokiu būdu statinio paviršius tirpsta, o ištirpę reakcijos produktai nuplaunami. Taip marmuras dūlėja.

Rūgštieji lietūs ardo ne vien marmurą ar smiltainį – metalo ir betono konstrukcijos taip pat pažeidžiamos rūgščiųjų lietų. Pavyzdžiui, ilgainiui

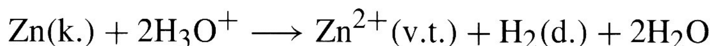


Mirties pabučiavimas. Šio vyriškio statula ilgai išbuvo atvirame ore.



Vyriškis atgavęs veidą. Restauravimui panaudotas siliciu sucementuotas smiltainis, labai atsparus oro užterštumui.

„sugraužiami“ cinkuoti (Zn) lietvamzdžiai:



$$Zn(k.) + 2H_3O^+ \longrightarrow Zn^{2+}(v.t.) + H_2(d.) + 2H_2O$$

(susidarę Zn^{2+} jonai nuplaunami).

Ši reakcija atspindi, kas vyksta reaguojant kai kuriems metalams su rūgštimi – metalas atiduoda savo *elektronus* H_3O^+ jonams, ir išsiskiria vandenilis H_2(d.). Tokia reakcija iš principo gali vykti su visais netauriaisiais metalais; taurieji metalai Au, Pt, Ag, Hg bei Cu tik ypatingomis sąlygomis reaguoja su rūgštimis, tačiau reakcijų metu vandenilis neišsiskiria.

Cheminės reakcijos, kurių metu nuo vienų medžiagų prie kitų pereina *elektronai,* kaip minėta I dalies 106 p., vadinamos *oksidacijos–redukcijos reakcijomis*. Tokios reakcijos yra kitokios negu *rūgščių–bazių reakcijos*, kurių metu pereina *protonai* (H^+).

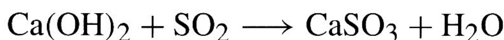
629 630 632 633

Kaip kovojama su rūgštėjimu?

Pastaraisiais 10–20 metų buvo rimtai susirūpinta rūgščiųjų lietų problemomis. Visoje Vakarų Europoje kiekvieną sekundę į atmosferą išmetama apie 2 tonas NO_2 bei SO_2!

Oro tarša yra tarptautinė problema, nes teršalai nepaiso valstybinių sienų. Dujiniai teršalai vėjo išnešiojami labai toli – sieros ir azoto dioksidai gali iškristi net už 2000 km atstumu nuo savo „gimtinės“. Tik 4% Danijoje kasmet į atmosferą išmetamo NO_2 iškrinta pačioje Danijoje. Užtat daug NO_2 gaunama iš Anglijos. Ir kitos šalys „keičiasi“ teršalais. Daugiausia rūgščių lietų į Lietuvą atneša pietvakarių vėjai iš Lenkijos, kurioje kurui vartojama akmens anglis.

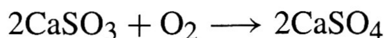
SO_2 išmetimą galima apriboti mažinant degaluose esančios sieros kiekį dar prieš sudeginant degalus. Kitas kelias – valyti dūmus jau po degimo. Šis metodas taikomas anglimi kūrenamose elektrinėse. Dūmai iš elektrinės praleidžiami pro vandeninį kalcio hidroksido $Ca(OH)_2$ tirpalą:



$$Ca(OH)_2 + SO_2 \longrightarrow CaSO_3 + H_2O$$

Šiuo metodu galima surišti 85% išsiskiriančio SO_2! Beje, susidarantį $CaSO_3$ (kalcio sulfitą) galima palyginti lengvai oksiduoti iki kalcio sulfato

$CaSO_4$ (gipso), naudojamo statybos pramonėje:



$$2CaSO_3 + O_2 \longrightarrow 2CaSO_4$$

Elektrinėse išsiskiriantį azoto oksidų NO_x kiekį galima šiek tiek sumažinti valdant degimą. O valyti dūmus nuo NO galima naudojantis amoniaku (NH_3) – paversti NO azotu N_2:



$$4NO + 4NH_3 + O_2 \longrightarrow 4N_2 + 6H_2O$$

Sieros dioksido emisija daugelyje šalių sumažėjusi, tačiau nuodingųjų azoto oksidų NO_x – tebedidėja, be kita ko, dėl didėjančio automobilių srauto.

Techniškai NO_x kiekį automobilio išmetamosiose dujose galima sumažinti maždaug iki penktadalio, įmontavus į automobilio išmetimo sistemą vadinamąjį *katalizatorių*, ir taip NO_x paverčiant nepavojingu N_2. Tačiau problema čia ta, kad šio metodo nepritaikysi seniems automobiliams. Be to, katalizatoriaus negalima naudoti, jei vartojamas švino turintis benzinas. Tad kol ką nors pavyks padaryti, teks palaukti, iki pasikeis automobilių parkas.

Viena iš katalizatoriuje vykstančių reakcijų yra:

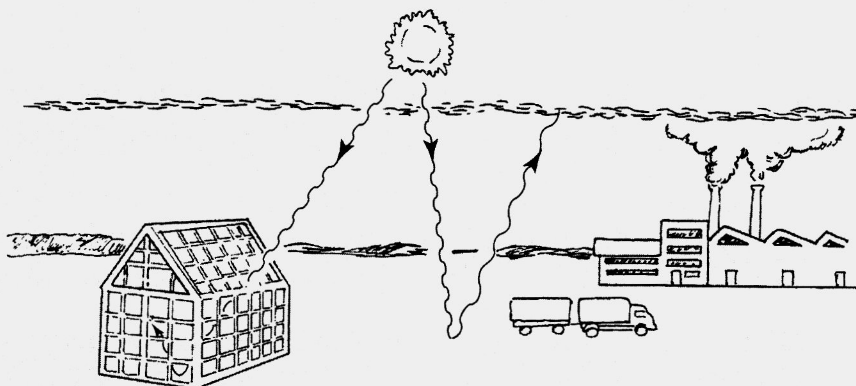


$$2NO + 2CO \longrightarrow N_2 + 2CO_2$$

Kaip ir manyta, NO pašalinama ir susidaro N_2. Tačiau susidaro ir CO_2! Tai puikiai iliustruoja, kokios sudėtingos esti užterštumo problemos. Kuo tobuliau veikia katalizatorius, tuo daugiau į atmosferą išmetama CO_2 – visa problema tik perkeliama nuo azoto oksido NO anglies dioksidui CO_2. Tačiau yra vienas paprastas ir efektyvus būdas mažinti užterštumą – tai mažinti energijos vartojimą!

Kadangi azoto oksidų variklyje smarkiai daugėja augant greičiui, paprasčiausias būdas sumažinti nepageidaujamų teršalų išmetimą – įvesti greičio ribojimą. Daugumoje Vakarų Europos šalių, išskyrus Vokietiją, taip ir padaryta. Važiuojant 150 km/h greičiu, NO_x kiekis išmetamosiose dujose yra daugiau nei 3 kartus didesnis negu važiuojant 80 km/h.

Šiltnamio efektas



Pagrindinė šiltnamio efekto priežastis – anglies dioksidas, kuris, paprastai tariant, praleidžia pro atmosferą saulės spindulius, tačiau sulaiko didžiąją dalį nuo žemės kylančio šiluminio spinduliavimo. Kadangi CO_2 šitaip „palaiko šilumą“, tai vartojamas apibūdinimas *šiltnamio efektas.*

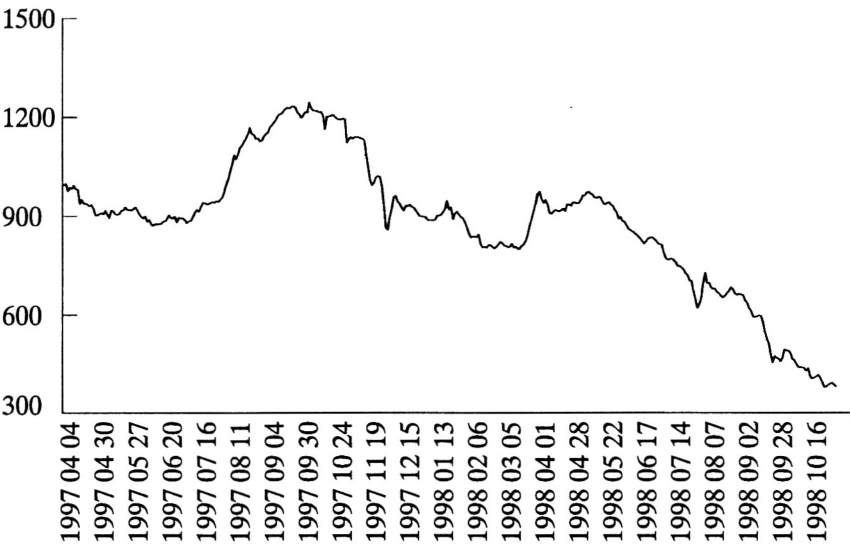
Šiltnamio efektas yra itin naudingas, nes be tokių CO_2 „patalų“ vidutinė Žemės temperatūra būtų maždaug 35 laipsniais žemesnė!

Nėra abejonių, kad išvystytos pramonės šalys į atmosferą išmeta didelius kiekius CO_2. Daug kas baiminasi, kad ateityje tai padidins vidutinę temperatūrą Žemėje, o dėl to ašigaliuose gali sparčiai tirpti ledas ir prasidėti katastrofiški potvyniai. Tokie požymiai pastebimi paskutinį XX a. dešimtmetį. Todėl Rio de Žaneire 1996 m. pasirašytas susitarimas, pagal kurį numatoma labai sumažinti CO_2 išmetimą.

7. Funkcijos

7.1. Įvadas

Žiniasklaida pateikia daug grafikų ir lentelių, iliustruojančių sąryšius tarp įvairiausių kintamųjų dydžių. Dažnai vienas iš tų kintamųjų būna laikas.

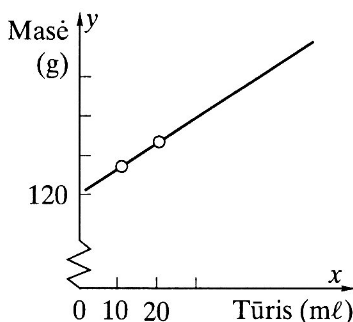


Indeksas „Litin", rodantis akcijų kainų svyravimą Lietuvos rinkoje.

Žemės ūkio produkcijos gamybos Lietuvoje raidą 1991–1997 m. (kilogramais vienam gyventojui) atspindi tokia lentelė:

Metai	Grūdai	Bulvės	Mėsa	Pienas
1991	891	402	120	776
1992	592	287	111	644
1993	723	473	74	552
1994	575	295	60	510
1995	526	429	56	490
1996	729	551	54	494
1997	824	494	54	526

Taip pat ir daugumoje eksperimentų, kuriuos atliekame per gamtos mokslų pamokas, matuojame priklausomybę tarp dviejų kintamųjų dydžių. Pavyzdžiui, kai į matavimo stiklinę įpilame skysčio, tai nuo įpilto kiekio priklauso stiklinės su skysčiu masė.



x	0	10	...	100
y	120	128	...	200

Šiame pavyzdyje skysčio kiekis lemia bendrą masę. Skysčio kiekį galime keisti kaip panorėję, todėl jį vadinsime *nepriklausomu kintamuoju,* o masę gauname sverdami, tad ji – *priklausomas kintamasis.* Kitaip sakant, stiklinės su skysčiu masė yra skysčio kiekio *funkcija.*

Kad galėtume aprašyti tokius sąryšius, pravartu susipažinti su kai kuriomis paprasčiausiomis matematinėmis funkcijomis. Jomis naudojantis modeliuojamos įvairios mus supančio pasaulio situacijos.

7.2. Funkcijos sąvoka

Štai visai paprasti nurodymai, kaip skaičiuoti:

„*Sugalvokite skaičių; pakelkite jį kvadratu ir pridėkite vienetą*“.

Taisyklė nusakyta žodžiais, vėliau ją užrašysime ir formule.

Kokį gausime rezultatą, žinoma, priklausys nuo sugalvoto skaičiaus. Sugalvoję 2, gausime 5, nes $2^2 + 1 = 5$.
O sugalvoję 5, gausime 26, nes $5^2 + 1 = 26$.

Sąryšį tarp sugalvotojo skaičiaus ir gaunamo rezultato galima užrašyti raidėmis. Pasirenkamąjį skaičių pavadinus x, o rezultatą – y, ta taisyklė gali būti užrašyta šitaip:

$$y = x^2 + 1.$$

Sakome, kad y yra x funkcija, nes y priklauso nuo skaičiaus x – su kiekviena x reikšme iš lygties gauname vienintelę y reikšmę. Kintamasis

x čia yra nepriklausomas, o y – priklausomas. Lygtis nurodo būdą, kaip kiekvienai x reikšmei rasti atitinkamą y reikšmę, taigi ji nusako *skaičiavimo taisyklę*. Kintamasis y vadinamas *funkcijos reikšme* nuo x, rašoma $y = f(x)$ (skaitome: y lygu f nuo x).

Remdamiesi skaičiavimo taisykle $f(x) = x^2 + 1$, apskaičiuosime keletą funkcijos reikšmių:

$$\begin{aligned}
f(-2) &= (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5 \\
f(-1) &= (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2 \\
f(0) &= (0)^2 + 1 = 0 + 1 = 1 \\
f(1) &= (1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2 \\
f(2) &= (2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5 \\
f(3) &= (3)^2 + 1 = 9 + 1 = 10
\end{aligned}$$

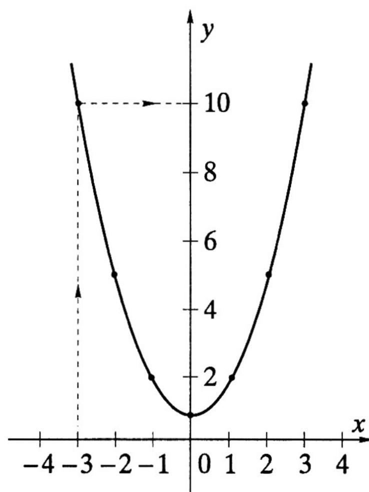
ir t. t.

Tokių skaičiavimų rezultatus galima surašyti į lentelę, kuri taip pat nusako funkciją:

x	...	−2	−1	0	1	2	3	...
y	...	5	2	1	2	5	10	...

Pažymėję šias skaičių poras $(x; y)$ koordinačių plokštumoje, gauname taškų seką. Sujunkime tuos taškus kreive ir gausime funkcijos grafiką, vaizdžiai aprašantį tą funkciją.

Pagal grafiką galima nustatyti funkcijos reikšmes. Pavyzdžiui, grafike randame, kad $f(-3) = 10$.

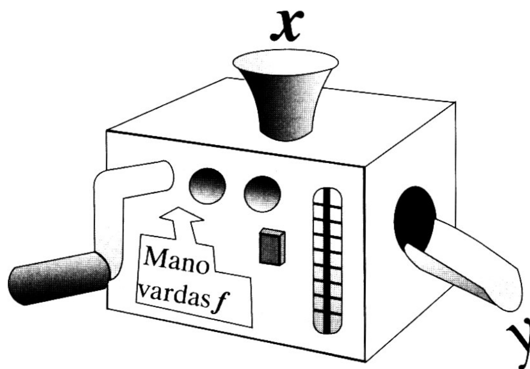


Kaip matome, *funkciją* galima aprašyti trejopai:

1) lygtimi (skaičiavimo taisykle),
2) lentele,
3) grafiku.

Skaičių aibė, iš kurios galima rinktis x, vadinama funkcijos *apibrėžimo sritimi* ir žymima X; skaičių aibė, sudaryta iš visų funkcijos reikšmių, vadinama funkcijos *reikšmių sritimi* ir žymima Y. Pastarajame pavyzdyje apibrėžimo sritis – visi skaičiai, kadangi bet kokį skaičių galima kelti kvadratu (ir po to pridėti vienetą). Reikšmių sritis – visi skaičiai, didesni už 1 arba jam lygūs, nes pakėlę bet kurį teigiamą ar neigiamą skaičių kvadratu, gauname teigiamą skaičių. Mažiausia y reikšmė gaunama taške $x = 0$, būtent – $f(0) = 1$. Kad mažiausia y reikšmė yra 1, matyti ir grafike.

Eksperimente su spiritu ir stikline spirito kiekį – kol stiklinėje yra vietos – galime pasirinkti laisvai. Todėl apibrėžimo sritis čia yra tūriai nuo 0 iki 100 mℓ (stiklinės talpa), o reikšmių sritis – masės nuo 120 g (tuščios stiklinės masė) iki 200 g.



Funkcijos mašina. Funkciją galima įsivaizduoti kaip mašiną, kuri, įvedus į ją skaičių, pagamina kitą skaičių. Šios funkcijos f apibrėžimo sritis yra tie skaičiai x, kuriuos mašina gali apdoroti, o reikšmių sritis – skaičiai, kuriuos mašina pateikia.

Jau esame nagrinėję (I dalyje, 36 p.) tiesinę funkciją

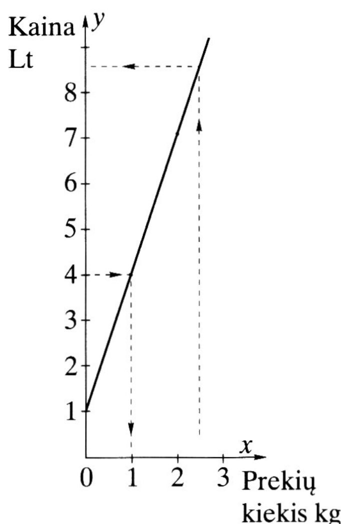
$$y = a \cdot x + b.$$

Čia x yra nepriklausomas kintamasis, o y – priklausomas kintamasis.

Pavyzdys

Panagrinėsime prekę – pavyzdžiui, obuolius, kainuojančius 3 litus už kilogramą. Be to, mums reikia ir maišelio, kuris kainuoja 1 Lt. Iš viso kaina už x kilogramų bus y litų. Kainą galima rasti pagal tokią skaičiavimo taisyklę:

$$y = 3 \cdot x + 1.$$



x	0	1	2	3	...	10
y	1	4	7	10	...	31

Tarkime, kad maišelyje telpa ne daugiau kaip 10 kg obuolių. Tuomet funkcijos apibrėžimo sritis bus

$$X(f) = [0; 10],$$

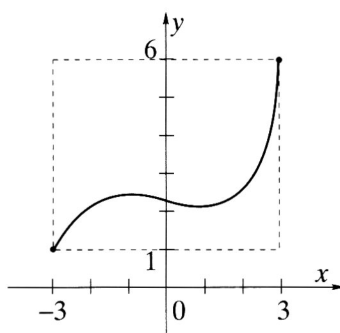
o reikšmių sritis –

$$Y(f) = [1; 31].$$

Šios funkcijos grafikas yra tiesė, einanti per tašką (0; 1).
Pagal grafiką galima, pavyzdžiui, nustatyti, kad 2,5 kg obuolių kainuos 8,50 Lt, o už 4 litus galima nusipirkti 1 kg obuolių (su maišeliu).

Pavyzdys
Funkcijos, kurios grafikas pavaizduotas apačioje, apibrėžimo sritis yra visi x, didesni arba lygūs minus 3 bei mažesni arba lygūs 3. Tai užrašoma $-3 \leqslant x \leqslant 3$. Reikšmių aibė – visi y, kur $1 \leqslant y \leqslant 6$. Tai galima užrašyti šitaip:

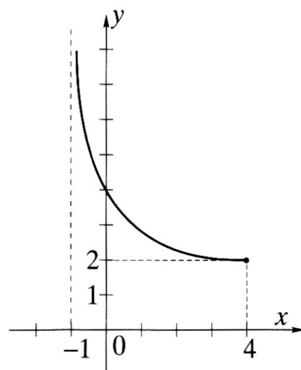
$$X(f) = [-3; 3] \quad \text{ir} \quad Y(f) = [1; 6].$$



Pavyzdys

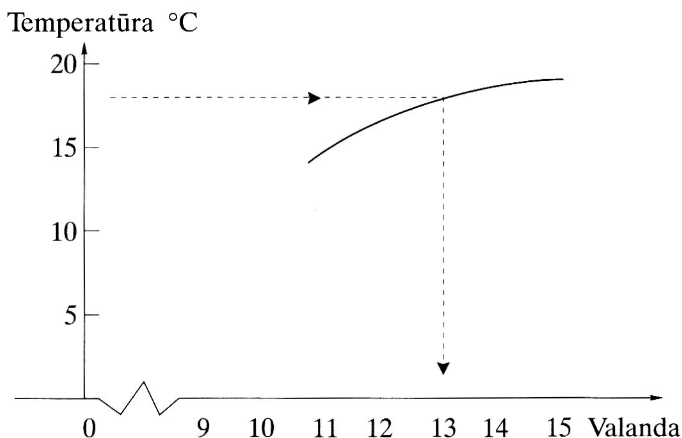
Grafike matyti, kad: $X(f) =]-1; 4]$ ir $Y(f) = [2; \infty[$. Atkreipkite dėmesį, kad skliaustas ties -1 apgręžtas į priešingą pusę, nes -1 nepriklauso apibrėžimo sričiai.

Taigi apibrėžimo sritis nustatoma x ašyje, o reikšmių sritis – y ašyje.



701 702 703

Pavyzdys

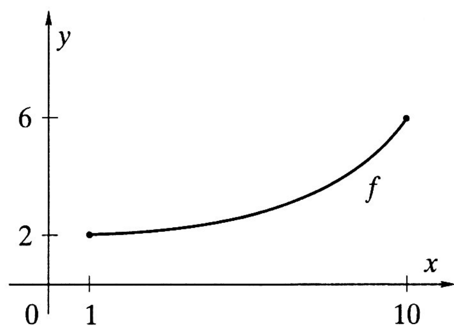


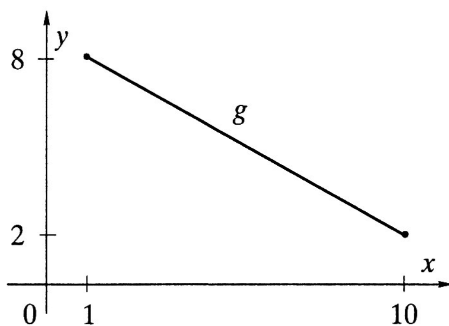
Čia nubraižytas temperatūros darbo kambaryje kaip laiko funkcijos grafikas. Reikia išsiaiškinti, kuriuo dienos metu yra tinkamiausia darbui temperatūra.

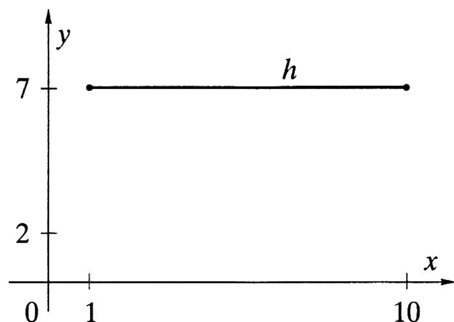
Sakykime, kad palankiausia darbui temperatūra yra 18°C. Tuomet reikia išspręsti lygtį $f(x) = 18$. Grafike matyti, kad $f(13) = 18$. Vadinasi, tinkamiausia darbui temperatūra darbo kambaryje būna 13 valandą.

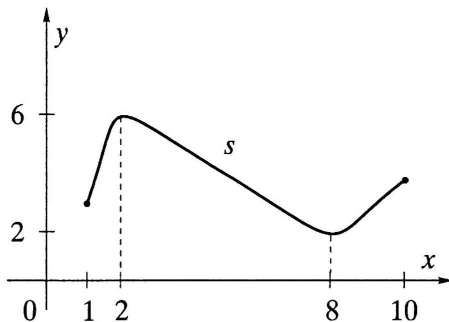
Funkcijų kitimas

Patyrinėjus funkcijos grafiką galima susidaryti įspūdį, kaip priklausomai nuo x kinta funkcijos reikšmės. Apačioje pavaizduoti keturių skirtingų funkcijų – f, g, h, s – grafikai.









Pagal funkcijos f grafiką aišku, kad funkcijos f reikšmės didėja visame nagrinėjamajame intervale. Sakome, kad funkcija f intervale $1 \leqslant x \leqslant 10$ didėja. Tai reiškia, kad mažiausia funkcijos reikšmė (funkcijos *minimumas*) bus $\min f(x) = f(1) = 2$, o didžiausia (funkcijos *maksimumas*) – $\max f(x) = f(10) = 6$. Funkcijos reikšmių sritį sudaro visi y intervale $2 \leqslant y \leqslant 6$.

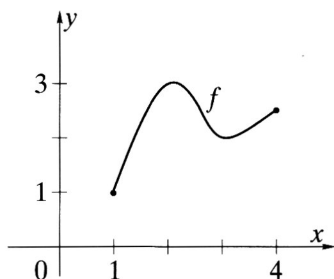
Funkcijos g grafike matyti, kad funkcijos g reikšmės mažėja visame nagrinėjamajame intervale – sakome, kad funkcija g intervale $1 \leqslant x \leqslant 10$ *mažėja.* Tai reiškia, kad funkcijos maksimumas bus $\max g(x) = g(1) = 8$; o minimumas – $\min g(x) = g(10) = 2$. Funkcijos reikšmių sritis bus visi y intervale $2 \leqslant y \leqslant 8$.

Funkcijos h visos reikšmės yra vienodos, jos lygios 7. Taigi ši funkcija nei didėjanti, nei mažėjanti – ji yra *pastovioji* ir lygi 7. Jos maksimumas sutampa su minimumu – $\max h(x) = \min h(x) = 7$. Visą funkcijos reikšmių sritį sudaro vienas skaičius 7.

Funkcija s visame nagrinėjamajame intervale nėra nei didėjanti, nei mažėjanti. Iš grafiko aišku, kad s didėja, kai $1 \leqslant x \leqslant 2$, po to mažėja esant $2 \leqslant x \leqslant 8$, ir kai $8 \leqslant x \leqslant 10$, vėl didėja. Pagal grafiką taip pat aišku, kad $\max s(x) = s(2) = 6$ ir $\min s(x) = s(8) = 2$. Funkcijos reikšmių aibę sudaro visi y iš $2 \leqslant y \leqslant 6$.

Pratimas

Piešinėlyje pavaizduotas funkcijos f grafikas. Nustatykite funkcijos apibrėžimo sritį. Raskite funkcijos minimumą ir maksimumą. Nustatykite intervalus, kur funkcija didėja ir kur mažėja. Nustatykite funkcijos f reikšmių sritį.



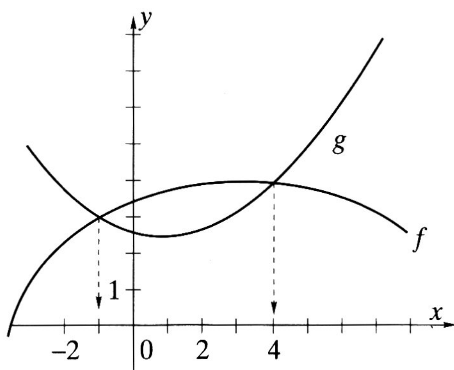
Pavyzdys: Grafinis lygčių sprendimas

Tarkime, reikia rasti, su kuriomis x reikšmėmis yra teisinga lygybė

$$f(x) = g(x).$$

Tai galima atlikti grafiškai. Tereikia tik rasti taškus, kuriuose kertasi funkcijų grafikai ir nustatyti jų x reikšmes. Piešinėlyje matyti, kad šiuo atveju yra du sprendiniai:

$x = -1$ ir $x = 4$.



Pavyzdys

Reikia išspręsti lygtį $\sqrt{x} = -\frac{1}{2}x + 2$. Šią lygtį lengviausia spręsti grafiškai. Kairioji ir dešinioji lygybės pusės nagrinėjamos atskirai. Kairiąją pasižymime $f(x)$, o dešiniąją – $g(x)$:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{ir} \quad g(x) = -\frac{1}{2}x + 2.$$

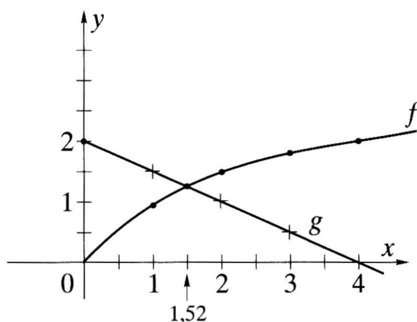
Kad galėtume nubraižyti šių funkcijų grafikus, pirmiausia sudarome jų lentelę:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	1	1,41	1,73	2
$g(x)$	2	1,5	1	0,5	0

Piešinėlyje matyti, kad grafikai kertasi taške $x \approx 1{,}52$, tad lygties

$$\sqrt{x} = -\frac{1}{2}x + 2$$

sprendinys yra apytiksliai lygus $1{,}52$.



704 705 706 707 708 709 710 711 712

7.3. Daugianariai

Toliau nagrinėsime paprastas, bet svarbias funkcijas – vadinamuosius *daugianarius.*

Šios funkcijos yra daugianarių pavyzdžiai:

$$f_1(x) = x^3 - 2 \cdot x^2 + x - 1; \quad f_2(x) = 2 \cdot x^5 - 3 \cdot x^2 + 7;$$
$$f_3(x) = 3 \cdot x + 5.$$

Aukščiausias x laipsnis daugianaryje vadinamas to *daugianario laipsniu.* Taigi $f_1(x)$ yra trečiojo laipsnio daugianaris, $f_2(x)$ yra penktojo laipsnio daugianaris, o $f_3(x)$ yra pirmojo laipsnio daugianaris. Jei funkcija yra pastovi (pvz., $f_4(x) = 7$), tai sakome, kad daugianario laipsnis – 0. Juo aukštesnio laipsnio daugianaris, juo daugiau jis gali turėti maksimumo bei minimumo taškų.

$f(x) = b$ $(b \neq 0)$ yra nulinio laipsnio daugianaris. Jo grafikas – horizontali tiesė.

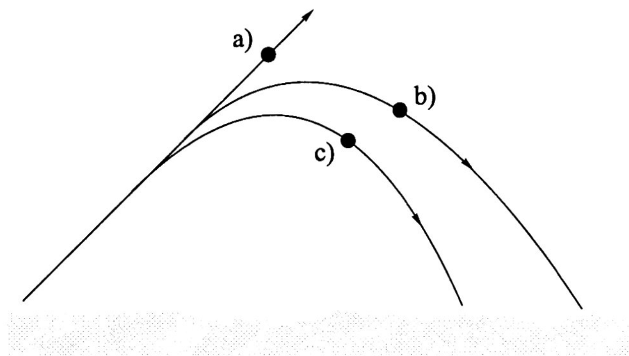
$f(x) = a \cdot x + b$ $(a \neq 0)$ yra pirmojo laipsnio daugianaris. Jo grafikas – įžambi tiesė.

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ $(a \neq 0)$ yra antrojo laipsnio daugianaris. Jo grafikas – parabolė.

$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ $(a \neq 0)$ yra trečiojo laipsnio daugianaris. Trečiojo laipsnio daugianarių grafikai esti kelių tipų (žr. 162 p.).

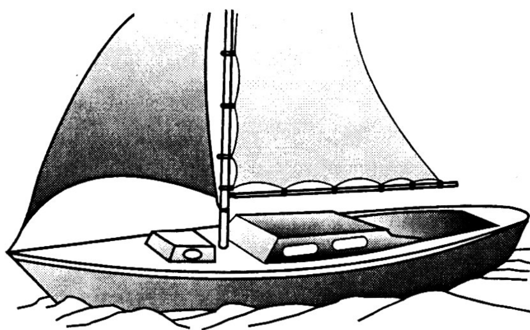
Daugianariai yra svarbūs todėl, kad jais galima aproksimuoti daugumą kitų funkcijų ir modeliuoti daugelį gamtos reiškinių.

Jei į viršų įžambiai mesime kamuolį, jis nelėks tiese – tiek dėl Žemės traukos jėgos, tiek dėl stabdančio oro pasipriešinimo. 1638 m. Galilėjas Galilėjus įrodė, kad nesant oro pasipriešinimo, kamuolys ar sviedinys judėtų parabole, o nesant ir Žemės traukos jėgos – tiese.



a) Kamuolio judėjimo trajektorija, jei nebūtų nei oro pasipriešinimo, nei Žemės traukos jėgos.
b) Kamuolio judėjimo trajektorija, jei nebūtų oro pasipriešinimo.
c) Reali trajektorija.

Jei laikydami už galų lenksime ploną metalinį strypą ar medinę lentelę, tai tas strypas ar lentelė išlinks. Šį išlinkį matematiškai galima gana tiksliai aprašyti trečiojo laipsnio daugianario grafiko atkarpa. Štai kodėl trečiojo laipsnio daugianariai naudojami kuriant naujus automobilių modelius, taip pat projektuojant laivus.



Laivo šono išlinkis gerai atitinka trečiojo laipsnio daugianario grafiką.

Toliau nagrinėsime daugianarius, pradėję nuo paprasčiausių. Juos galima vadinti kitų daugianarių *prototipais*. Tirsime jų grafikus ir žiūrėsime, kaip keičiasi grafikas ir funkcijos išraiška, kai grafiką lygiagrečiai stumiame, tempiame x ar y ašies kryptimi bei atspindime x ašies atžvilgiu.

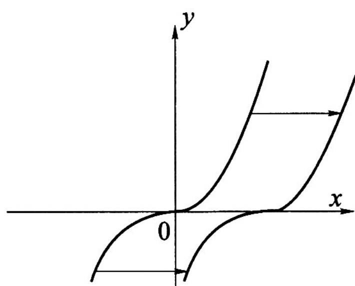
Parodysime, kad tokiomis transformacijomis iš paprasčiausiųjų galima gauti bet kokius kitus to paties laipsnio daugianarius. Tai geras įrankis tikrovės problemoms modeliuoti.

Tie paprasčiausieji daugianariai, nuo kurių pradėsime nagrinėti, yra tokie:

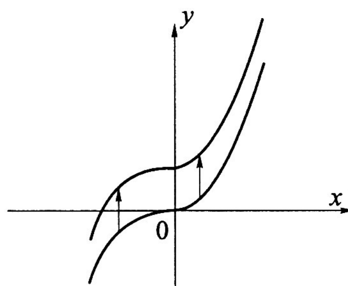
pirmojo laipsnio – $f(x) = x$
antrojo laipsnio – $f(x) = x^2$
trečiojo laipsnio – $f_1(x) = x^3 + x$, $f_2(x) = x^3$ ir $f_3(x) = x^3 - x$.

Aukštesniojo laipsnio daugianariai sudaryti kur kas sudėtingiau, tad į juos čia nesigilinsime.

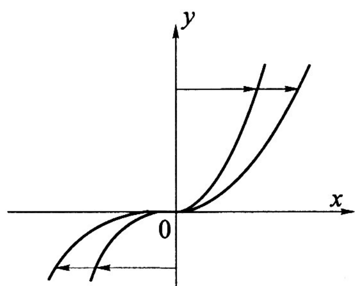
Pagrindinės transformacijos



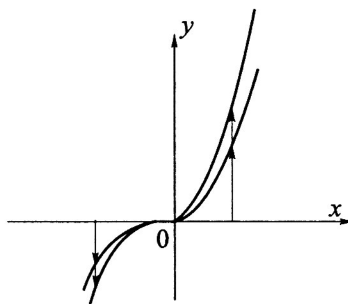
1) Lygiagretusis postūmis x ašies kryptimi. Funkcijos grafikas, nekeičiant jo pavidalo, pastumiamas x ašies kryptimi.



2) Lygiagretusis postūmis y ašies kryptimi. Funkcijos grafikas, nekeičiant jo pavidalo, pastumiamas y ašies kryptimi.



3) Ištempis x ašies kryptimi. y reikšmės paliekamos tos pačios, o visos x koordinatės dauginamos iš to paties skaičiaus – ištempio koeficiento.



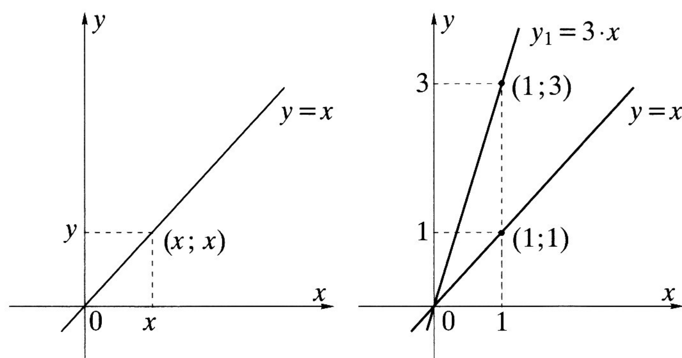
4) Ištempis y ašies kryptimi. x reikšmės paliekamos tos pačios, o visos y koordinatės dauginamos iš to paties skaičiaus – ištempio koeficiento.

Pirmojo laipsnio daugianariai

Paprasčiausias pirmojo laipsnio daugianaris yra $y = x$. Jo grafikas – tiesė, dalijanti pirmąjį ir trečiąjį kvadrantus pusiau.

Patyrinėjus pirmojo laipsnio daugianarį $y_1 = 3 \cdot x$ matyti, kad su kiekvienu x jo y reikšmė yra 3 kartus didesnė nei atitinkama $y = x$ reikšmė. Matome, kad $y = x$ grafikas, ištemptas y ašies kryptimi, kai ištempio koeficientas 3, virsta $y_1 = 3 \cdot x$ grafiku.

x	...	−2	−1	0	1	2	3	...
y	...	−2	−1	0	1	2	3	...
y_1	...	−6	−3	0	3	6	9	...



Apibendrinant galima pasakyti, kad ištempus $y = x$ grafiką y ašies kryptimi, pasirinkus koeficientą a, grafikas tebeina per tašką (0; 0), tačiau jo krypties koeficientas padidėja a kartų ir grafiko lygtis tampa tokia:

$$y = a \cdot x.$$

Pratimas: Pirmojo laipsnio daugianaris $y = a \cdot x$

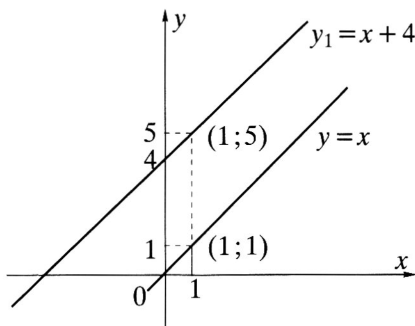
Šio skyriaus pratimuose siūloma patyrinėti daugianarių grafikus. Jeigu turite kompiuterį ir mokate naudotis kokia nors programa funkcijų grafikams braižyti, tai pasinaudokite jos galimybėmis. Jeigu ne – visiškai užteks languoto popieriaus su nubrėžtomis koordinačių sistemos ašimis ir paprasčiausio pieštuko.

Nubraižykite toje pačioje koordinačių plokštumoje šių funkcijų grafikus:

$$y = x, \quad y = 3 \cdot x, \quad y = -3 \cdot x,$$
$$y = 1/3 \cdot x, \quad y = 4 \cdot x.$$

Patarimas. Kadangi visi grafikai yra tiesės, pakanka rasti du grafiko taškus.
Suformuluokite taisyklę, kaip nuo a dydžio bei ženklo priklauso grafiko padėtis.

Dabar panagrinėsime pirmojo laipsnio daugianarį $y = x + 4$. Palyginę $y = x$ ir $y_1 = x + 4$ lenteles, matome, kad kiekviena y_1 reikšmė yra 4 vienetais didesnė už atitinkamą y reikšmę:



x	...	−2	−1	0	1	2	3	...
y	...	−2	−1	0	1	2	3	...
y_1	...	2	3	4	5	6	7	...

Matyti, kad $y_1 = x + 4$ grafikas gaunamas lygiagrečiai pastūmus $y = x$ grafiką per 4 vienetus y ašies kryptimi. Abiejų grafikų krypties koeficientas tebėra tas pats – 1.

Pratimas: Pirmojo laipsnio daugianaris $y = x + b$

Nubraižykite toje pačioje koordinačių plokštumoje šių funkcijų grafikus:

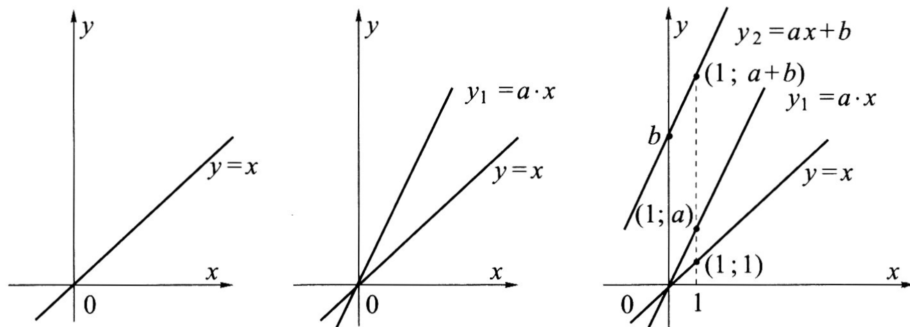
$$y = x, \quad y = x + 3, \quad y = x + 1/2, \quad y = x - 3.$$

Suformuluokite taisyklę, kaip nuo b dydžio bei ženklo priklauso grafiko padėtis.

714

Bendra taisyklė: *bet kokio pirmojo laipsnio daugianario $y = a \cdot x + b$ grafiką galima gauti iš $y = x$ grafiko, atlikus jo ištempį y ašies kryptimi su koeficientu a ir lygiagrečiai pastūmus y ašies kryptimi per b.*

$y = x$ $\longrightarrow$ (ištempis) $y_1 = a \cdot x$ $\longrightarrow$ (lygiagretus postūmis) $y_2 = a \cdot x + b$



Pratimas: Pirmojo laipsnio daugianario grafiko kitimas

1) Nustatysime, kaip kinta pirmojo laipsnio daugianario $y = a \cdot x + b$ grafikas, kai a lieka pastovus, o b kinta. Tegu $a = 1$, o b kinta, pavyzdžiui nuo -2 iki 3.
Nubrėžkite $y = x + b$ grafikus, kai $b = -2, -1, 0, 1, 2, 3$.
Suformuluokite išvadą, kaip kinta $y = x+b$ grafikas, kai b aprėpia visas intervalo $[-2; 3]$ reikšmes.

2) Dabar imsime $b = 0$, o a keisime. Nubrėžkite $y = ax$ grafikus, kai $a = -2, -1, 0, 1, 2$.
Suformuluokite išvadą, kaip kinta $y = ax$ grafikas, kai a aprėpia visas intervalo $[-2; 2]$ reikšmes.

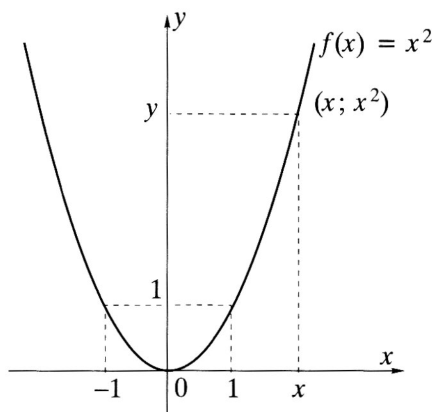
715

Antrojo laipsnio daugianariai

Paprasčiausias antrojo laipsnio daugianaris yra $f(x) = x^2$. Jo grafikas simetriškas ordinačių ašies atžvilgiu, kadangi su priešingomis x reikšmėmis jis įgyja tą pačią y reikšmę, pavyzdžiui, $f(-2) = f(2) = 4$.

Grafikas eina per tašką $(0; 0)$, nes $f(0) = 0$. Kai $x \neq 0$, $x^2 > 0$, taigi taške 0 yra funkcijos minimumas. Taškas $(0; 0)$ vadinamas grafiko *viršūne.* Atkreipkite dėmesį į tai, kad grafikas eina per taškus $(1; 1)$ ir $(-1; 1)$.

x	-2	-1	0	1	2	...
y	4	1	0	1	4	...



Daugianario $f(x) = x^2$ grafikas vadinamas *parabole.* Bet koks grafikas, gautas iš šio grafiko atlikus vieną ar daugiau iš keturių (išvardytų 153 p.) pakeitimų, taip pat vadinamas parabole. Kiekviena parabolė turi lygiagrečią ordinačių ašiai *simetrijos ašį* ir vieną *viršūnę* (maksimumo arba minimumo tašką).

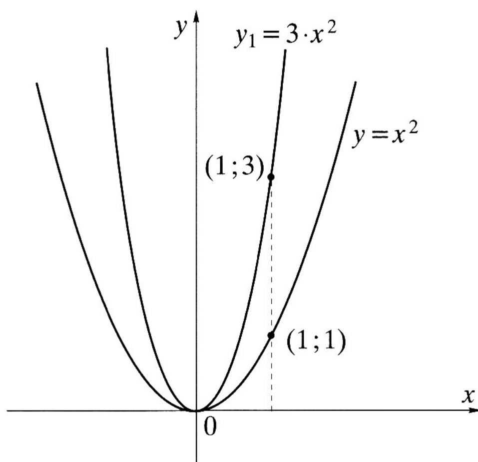
Ištempę $f(x) = x^2$ grafiką y ašies kryptimi su koeficientu 3, gauname grafiką su ta pačia simetrijos ašimi ir ta pačia viršūne kaip ir pradinio grafiko. Atkreipkite dėmesį į tai, kad dabar grafikas eina per taškus $(1; 3)$

ir $(-1; 3)$, taigi jo „ausys“ čia labiau suskliaustos. Ištemptojo grafiko lygtį užrašome šitaip:

$$y_1 = 3 \cdot x^2.$$

Lentelė bus tokia:

x	...	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	4	1	0	1	4	9	...
y_1	...	12	3	0	3	12	27	...



Pratimas: Antrojo laipsnio daugianaris $y = a \cdot x^2$

Nubraižykite toje pačioje koordinačių plokštumoje šių antrojo laipsnio daugianarių grafikus:

$$y = x^2, \quad y = 2 \cdot x^2, \quad y = 3 \cdot x^2, \quad y = 4 \cdot x^2,$$
$$y = \frac{1}{2} \cdot x^2, \quad y = -x^2, \quad y = -2 \cdot x^2.$$

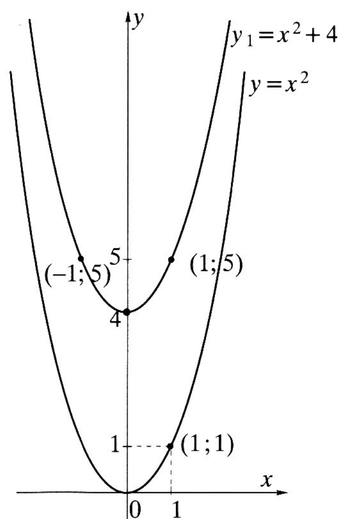
Patarimas. Jeigu nesinaudojate kompiuteriu, o braižote grafikus languotame popieriuje, tiksliai juos nubrėžti nelengva. Pakaks, jei paimsite kelias x reikšmes, pavyzdžiui, $x = -2$, $-1, 0, 1, \sqrt{2}$, ir sujungsite grafiko taškus parabolės formos kreive.

Suformuluokite taisyklę, kaip nuo a dydžio bei ženklo priklauso grafiko pavidalas ir padėtis.

Jei $y = x^2$ grafiką lygiagrečiai pastumiame per 4 vienetus y ašies kryptimi, tai reiškia, kad prie kiekvienos y reikšmės pridedame po 4. Vadinasi, lygiagrečiai pastumtos parabolės lygtis bus $y_1 = x^2 + 4$; lentelė bus tokia:

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$y = x^2$	...	9	4	1	0	1	4	9	...
$y_1 = x^2 + 4$	...	13	8	5	4	5	8	13	...

Matyti, kad simetrijos ašimi tebėra y ašis, tačiau pastumtosios parabolės viršūnės koordinatės yra $(0; 4)$. Atkreipkite dėmesį į tai, kad ši parabolė eina per taškus $(-1; 5)$ ir $(1; 5)$.



Pratimas: Antrojo laipsnio daugianaris $y = x^2 + k$

Nubraižykite toje pačioje koordinačių plokštumoje šių funkcijų grafikus:

$$y = x^2, \quad y = x^2 + 1, \quad y = x^2 + 2, \quad y = x^2 + 3, \quad y = x^2 - 3.$$

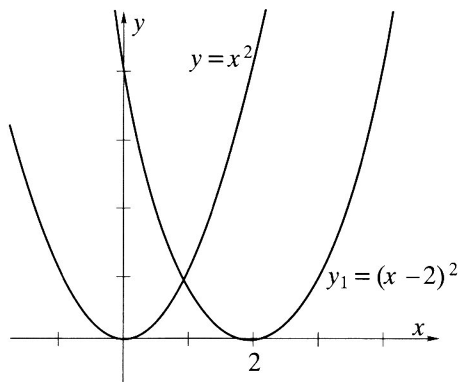
Suformuluokite taisyklę, kaip nuo k dydžio bei ženklo priklauso grafiko pavidalas ir padėtis. Nurodykite kiekvienu atveju viršūnės koordinates ir simetrijos ašį.

Dabar patyrinėsime funkciją $y_1 = (x - 2)^2$.

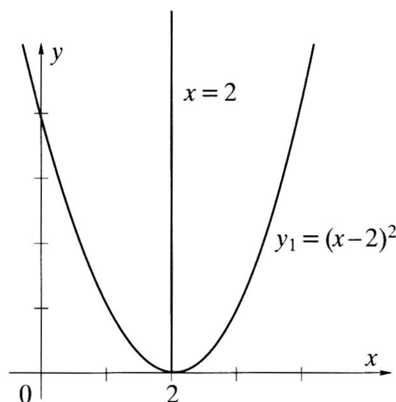
x	...	-1	0	1	2	3	4	5	...
$y = x^2$	...	1	0	1	4	9	16	25	...

x	...	1	2	3	4	5	6	7	...
$y_1 = (x - 2)^2$	...	1	0	1	4	9	16	25	...

Palyginus šias dvi lenteles, matyti, kad apatinės lentelės x eilutė viršutinės lentelės x eilutės atžvilgiu pasistūmusi kairėn per du vienetus. Tai reiškia, kad $y_1 = (x - 2)^2$ grafikas gaunamas, lygiagrečiai pastūmus $y = x^2$ grafiką teigiamąja x ašies kryptimi per 2 vienetus.



Taigi $y_1 = (x-2)^2$ grafiką gauname iš $y = x^2$ grafiko, pastūmę jį teigiama x ašies kryptimi per 2 vienetus. Tai reiškia, kad naujojo grafiko simetrijos ašis yra vertikali tiesė, kurios visų taškų x koordinatės yra 2; sakome, kad šios simetrijos ašies lygtis yra $x = 2$. Naujojo grafiko viršūnės koordinatės – (2; 0).



Pratimas: Antrojo laipsnio daugianaris $y = (x-h)^2$

Pakelkite kvadratu ir įsitikinkite, kad $(x-2)^2$ yra antrojo laipsnio daugianaris. Nubraižykite toje pačioje koordinačių plokštumoje šių funkcijų grafikus:

$$y = x^2, \quad y = (x-1)^2, \quad y = (x-2)^2,$$
$$y = (x-3)^2, \qquad y = (x+3)^2.$$

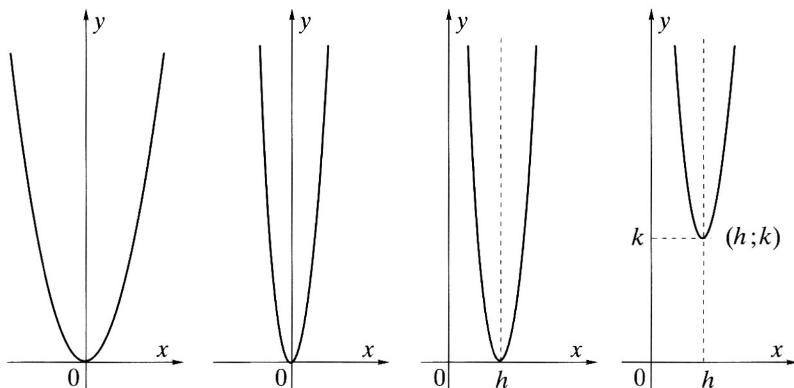
Patarimas. Ir čia pakanka grafikus nubrėžti apytiksliai. Vieną iš patogių x reikšmių rasite prilyginę reiškinį skliaustuose nuliui, pvz., $x - 3 = 0$, kai $x = 3$.

Suformuluokite taisyklę, kaip nuo h dydžio bei ženklo priklauso grafiko pavidalas ir padėtis. Nurodykite kiekvienu atveju viršūnės koordinates ir simetrijos ašį.

Bendra taisyklė:

Funkcijos $f(x) = a(x-h)^2+k$ grafikas gaunamas $y = x^2$ grafiką ištempus y ašies kryptimi, lygiagrečiai pastūmus x ašies kryptimi ir galiausiai lygiagrečiai pastūmus y ašies kryptimi.

$$y = x^2 \longrightarrow y = a\cdot x^2 \longrightarrow y = a\cdot(x-h)^2 \longrightarrow y = a\cdot(x-h)^2+k$$



Paskutinio grafiko simetrijos ašies lygtis $x = h$, o viršūnės koordinatės $(h; k)$.

Pratimas: Antrojo laipsnio daugianario $y = a(x - h)^2 + k$ grafiko kitimas
Nustatysime, kaip kinta $y = a(x - h)^2 + k$ grafikas, kai a, h, k keičiasi.

1) Tegu iš pradžių $h = k = 0$. Imkite a reikšmes $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ ir apytiksliai nubrėžkite funkcijų $y = ax^2$ grafikus. Suformuluokite išvadą, kaip keičiasi grafikas, kai a aprėpia visas intervalo $[-3; 3]$ reikšmes.
2) Tegu dabar $a = 1$, $h = 0$. Nubrėžkite $y = x^2 + k$ grafiką, kai $k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Suformuluokite išvadą, kaip keičiasi grafikas, kai k aprėpia visas intervalo $[-3; 3]$ reikšmes.
3) Tegu $a = 1$, $k = 0$. Nubraižykite $y = (x - h)^2$ grafikus su $h = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Suformuluokite išvadą, kaip keičiasi grafikas, kai h aprėpia visas intervalo $[-3; 3]$ reikšmes.

716 717 718 719 720 721 722

Antrojo laipsnio daugianario grafikas

Dabar pasiaiškinsime, kaip tiriamas antrojo laipsnio daugianario

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{1}$$

grafikas, čia a, b, c – bet kurie skaičiai, $a \neq 0$.

Jau žinome, kaip rasti parabolės, išreikštos lygtimi

$$f(x) = a(x - h)^2 + k, \tag{2}$$

viršūnę ir simetrijos ašį.

Pirmiausia panagrinėkime pavyzdį

$$f(x) = 2(x - 3)^2 + 4.$$

Šios funkcijos grafikas yra parabolė su viršūne taške $(3; 4)$ ir simetrijos ašimi $x = 3$. Parodysime, kad atskliautus $f(x)$ galima užrašyti (1) lygties išraiška:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x - 3)^2 + 4 \\ &= 2\left(x^2 - 6x + 9\right) + 4 \\ &= 2x^2 - 12x + 18 + 4 \\ &= 2x^2 - 12x + 22. \end{aligned}$$

Taigi $f(x)$ išraišką perrašėme (1) lygties pavidalu su $a = 2$, $b = -12$ ir $c = 22$.

Taip pat galima perrašyti ir (2) lygtį:

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - h)^2 + k \\ &= a\left(x^2 - 2hx + h^2\right) + k \\ &= ax^2 - 2ahx + ah^2 + k \\ &= ax^2 + \left(-2ah\right)x + \left(ah^2 + k\right). \end{aligned}$$

Tai jau ir yra (1) lygties išraiška su $b = -2ah$ ir $c = ah^2 + k$.

Ir atvirkščiai, pradėjus nuo (1) lygties antrojo laipsnio daugianario, t. y.

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

jį galima užrašyti (2) išraiška su tokiais h ir k, kad

$$b = -2ah \quad \text{ir} \quad c = ah^2 + k.$$

Iš pirmojo sąryšio matyti, kad skaičius h (viršūnės x koordinatė) turi būti

$$h = -\frac{b}{2a},$$

o tuomet įrašę šią h reikšmę į (1) lygtį, randame k (viršūnės y koordinatę).

Taigi parabolės, išreiškiamos (1) *lygtimi, viršūnės x koordinatė yra $h = -b/2a$. Viršūnės y koordinatę gauname, vietoj x į parabolės lygtį įrašę h.*

Parodėme, kad bet kokį antrojo laipsnio daugianarį galima gauti iš $y = x^2$, atliekant tokius pakeitimus: tempimą išilgai y ašies, lygiagretų postūmį išilgai x ašies ir lygiagretų postūmį išilgai y ašies. Tai reiškia, kad antrojo laipsnio daugianario grafikas yra parabolė, simetriška lygiagrečios ordinačių ašiai tiesės atžvilgiu (užrašoma lygtimi $x = h = -b/2a$) ir turinti viršūnę, kuri yra arba maksimumas (jei a neigiamas), arba minimumas (jei a teigiamas).

Pavyzdys
Panagrinėkime antrojo laipsnio daugianarį $f(x) = 2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 6$. Jo grafikas bus simetriškas šios tiesės atžvilgiu:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2 \cdot 2} = 1.$$

Kad gautume grafiko viršūnės y koordinatę, įrašome į lygtį $x = 1$:

$$f(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 6 = 4.$$

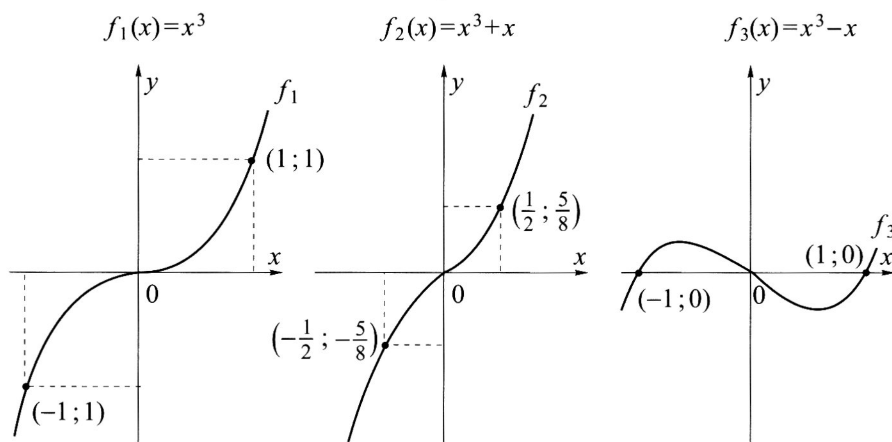
Taigi grafiko viršūnės koordinatės yra (1; 4).
Todėl $f(x)$ galima užrašyti šitaip: $f(x) = 2 \cdot (x - 1)^2 + 4$.

723 724 725 726 727 728 729

Trečiojo laipsnio daugianariai

Pasirodo, kad norint atliekant pakeitimus (transformavimą) gauti bet kokį trečiojo laipsnio daugianarį, reikia trijų prototipų funkcijų:

11. 936



Kiekvienos šių trijų funkcijų grafikas sudarytas iš dviejų dalių: besileidžiančios žemyn ir kylančios aukštyn. Taškai, kuriuose jos susitinka, vadinami perlinkio taškais. Visi grafikai simetriški perlinkio taško atžvilgiu. Galima įrodyti, kad bet kokio trečiojo laipsnio daugianario grafiką galima gauti vienos iš šių funkcijų grafiką vertikaliai ir/arba horizontaliai pastūmus, vertikaliai ir/arba horizontaliai ištempus bei atspindėjus x ašies atžvilgiu. Bet kokio trečiojo laipsnio daugianario grafikas turi simetrijos tašką (perlinkio tašką) ir kerta x ašį mažiausiai vieną ir daugiausia tris kartus.

Pratimas: Trečiojo laipsnio daugianaris

a) Nubraižykite toje pačioje koordinačių plokštumoje šių funkcijų grafikus:

$$y = x^3, \quad y = 3 \cdot x^3, \quad y = (x-1)^3,$$
$$y = x^3 + 2, \quad y = 3 \cdot (x-1)^3 + 2.$$

Pastaba. Funkcijos $y = x^3$ grafikas nubrėžtas puslapio viršuje. Sugalvokite, kokius pakeitimus reikia atlikti, kad iš šio grafiko gautume kitų keturių funkcijų grafikus.

b) Nubraižykite toje pačioje koordinačių plokštumoje šių funkcijų grafikus:

$$y = x^3 + x, \quad y = 3 \cdot x^3 + 3 \cdot x,$$
$$y = (x-1)^3 + (x-1), \quad y = x^3 + x + 2,$$
$$y = 3 \cdot (x-1)^3 + 3 \cdot (x-1) + 2.$$

Pastaba. Paskutinių keturių funkcijų grafikai gaunami atitinkamai transformuojant $y = x^3 + x$ (žr. aukščiau) grafiką. Kokius pakeitimus reikia atlikti?

c) Atlikite b) dalyje naudotus pakeitimus su $y = x^3 - x$ grafiku.

730 731 732 733

7.4. Kaip lentelėje atpažinti daugianarį?

Žinome, jog pirmojo laipsnio daugianariui $f(x) = a \cdot x + b$ būdinga tai, kad x padidėjus vienetu, y išauga dydžiu a. Dėl to lentelėje labai nesudėtinga atpažinti, ar tai pirmojo laipsnio daugianario lentelė. Dabar išplėtosime šį metodą taip, kad juo naudojantis lentelėje būtų galima atpažinti ir aukštesnio laipsnio daugianarius.

1) Pirmojo laipsnio daugianaris: $f(x) = a \cdot x + b$ $(a \neq 0)$.

Pirmosios eilės skirtumu Δf vadinamas $f(x)$ prieaugis, kai x padidėja vienetu.

Antrosios eilės skirtumu $\Delta\Delta f$ vadinamas Δf prieaugis, kai x padidėja vienetu.

Pavyzdys

Apskaičiuosime funkcijos $f(x) = 2 \cdot x + 3$ pirmosios ir antrosios eilės skirtumus.

x	$f(x) = 2 \cdot x + 3$	Δf	$\Delta\Delta f$
1	5		
		2	
2	7		0
		2	
3	9		0
		2	
4	11		0
		2	
5	13		0
		2	
6	15		0
		2	
7	17		

Išvada. Dydžiui x padidėjus 1, funkcija $f(x)$ išauga per $\Delta f = 2$. Taigi pirmosios eilės skirtumas yra pastovus ir lygus 2, o antrosios eilės – pastovus ir lygus 0.

Patyrinėję bet kokį pirmojo laipsnio daugianarį ir lygiai taip pat radę pirmosios bei antrosios eilės skirtumus, pamatytume, kad pirmosios eilės skirtumas yra pastovus, o antrosios eilės – lygus 0 (žr. lentelę). Atkreipkite dėmesį, kad pirmojo laipsnio daugianario pirmosios eilės skirtumas yra ne kas kita kaip jo grafiko krypties koeficientas.

x	$f(x) = a \cdot x + b$	Δf	$\Delta\Delta f$
1	$a + b$		
		a	
2	$2 \cdot a + b$		0
		a	
3	$3 \cdot a + b$		0
		a	
4	$4 \cdot a + b$		0
		a	
5	$5 \cdot a + b$		0
		a	
6	$6 \cdot a + b$		0
		a	
7	$7 \cdot a + b$		

Pastaba. Jeigu x didėtų kitu, nelygiu 1, žingsniu, skirtumas tarp pirmojo laipsnio daugianario funkcijos reikšmių vis tiek būtų pastovus (plg. 734 ir 735 užduotis).

734 735

2) Antrojo laipsnio daugianaris: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ $(a \neq 0)$.
Trečiosios eilės skirtumu $\Delta\Delta\Delta f$ vadinamas $\Delta\Delta f$ prieaugis, kai x padidėja vienetu.

Pavyzdys

Rasime antrojo laipsnio daugianario $f(x) = x^2$ pirmosios, antrosios ir trečiosios eilės skirtumus.

x	$f(x)$	Δf	$\Delta\Delta f$	$\Delta\Delta\Delta f$
1	1			
		3		
2	4		2	
		5		0
3	9		2	
		7		0
4	16		2	
		9		0
5	25		2	
		11		
6	36			

Išvada. Iš lentelės matyti, jog antrosios eilės skirtumas yra pastovus ir lygus 2, o trečiosios eilės skirtumas – lygus 0.

Patyrinėję antrojo laipsnio daugianarį $f(x) = a \cdot x^2 + c$, pastebėtume, jog x didėjant vienetu, antrosios eilės skirtumas esti pastovus ir lygus $2 \cdot a$, o trečiosios eilės skirtumas lygus 0. Pasirodo, kad tai teisinga bet kokiam antrojo laipsnio daugianariui $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

Sudarę daugianario $y = a \cdot x^2 + c$ $(b = 0)$ skirtumus, gausime tokią lentelę.

x	$f(x)$	Δf	$\Delta\Delta f$	$\Delta\Delta\Delta f$
1	$a + c$			
		3a		
2	$4a + c$		$2a$	
		5a		
3	$9a + c$		$2a$	0
		7a		
4	$16a + c$		$2a$	0
		9a		
5	$25a + c$		$2a$	0
		11a		
6	$36a + c$			

3) Aukštesniojo laipsnio daugianariai

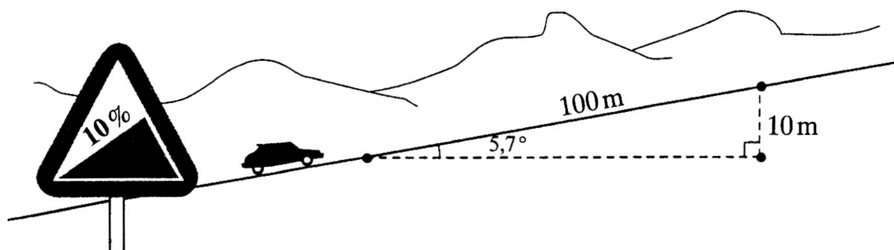
Trečiojo laipsnio daugianarių pastovus yra trečiosios eilės skirtumas, o ketvirtojo laipsnio daugianarių – ketvirtosios eilės skirtumas. Todėl turėdami duomenų lentelę, kur x reikšmės didėja pastoviu dydžiu, pavyzdžiui, vienetu, sudarę skirtumų lentelę, galime nustatyti, ar duotieji skaitiniai duomenys aprašomi daugianariu. Taip pat galima nustatyti, kokio laipsnio tas daugianaris. Laipsnis lygus pirmojo pastovaus skirtumo eilei.

736 737 738 739 740 741 742 743

8. Kampo sinusas

8.1. Sinusas ir kosinusas

Važiuojant kalvota vietove, kartais galima išvysti tokį kelio ženklą, reiškiantį įkalnę.



Kai įkalnės kampas yra 5,7°, nuvažiavus 100 m, kelias pakyla 10 m.

Ženklas rodo, kad kelio kilimas yra 10%. Bet ką gi tai reiškia – kad kelias kyla 10%? Tai reiškia, kad nuvažiavę keliu 100 metrų, pakylame 10 metrų. Toks įkalnės (nuolydžio) matas parankus daugeliu situacijų, todėl jam suteiktas specialus pavadinimas – tas matas vadinamas įkalnės (nuolydžio) kampo *sinusu*, čia įkalnės (nuolydžio) kampas – tai kampas tarp kelio ir horizontalės. Išmatavę šį kampą kruopščiai atliktame brėžinyje, rastume, kad jis apytiksliai lygus 5,7°. Šiame pavyzdyje sąryšis tarp įkalnės kampo ir kelio kilimo užrašomas šitaip:

$$\sin 5{,}7^\circ = 10\% = 0{,}10;$$

skaitykite: 5,7 laipsnių kampo sinusas yra 0,10.

Kampo sinusą galima rasti ir iš kitame puslapyje pateikto brėžinio, kur ant milimetrinio popieriaus nubrėžtas 10 cm spindulio lankas su kampų skale. Kiekvieną ant lanko esantį tašką sujungę su koordinačių pradžia, gausime tam tikrą kampą, kurio dydį galima perskaityti lanko skalėje. Pasinaudojus milimetrinio popieriaus padalomis, taip pat galima nustatyti lanko taško aukštį virš horizontalios ašies.

Kampo sinusą randame padaliję šį aukštį iš lanko spindulio, arba, kitais žodžiais tariant – padaliję iš lanko spindulio taško y koordinatę:

$$\sin v = \frac{y}{10}.$$

Pavyzdžiui, šitaip randame, kad

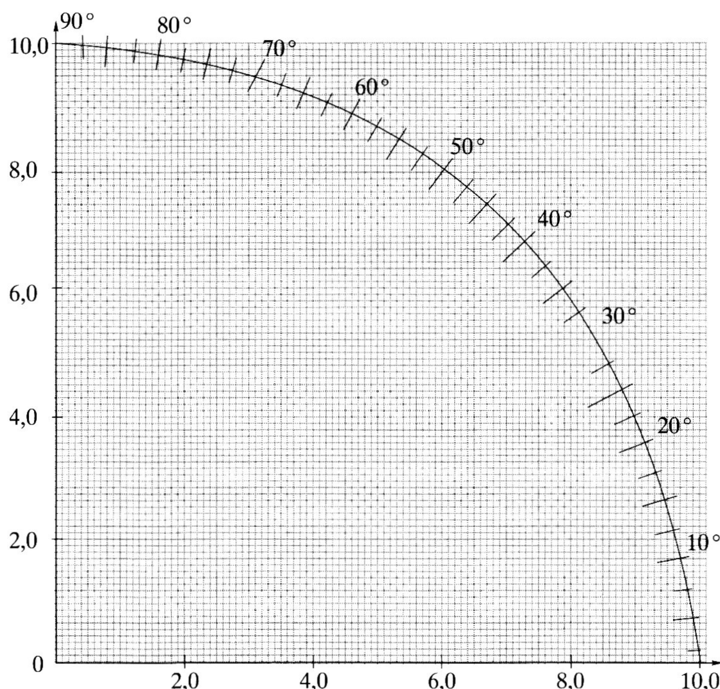
$$\sin 30^\circ = \frac{5}{10} = 0{,}50 \quad \text{(tai atitinka 50\% kilimą).}$$

Praktiniams tikslams taip pat naudinga įvesti lanko taško x koordinatės ir spindulio santykį. Jis vadinamas atitinkamo nuolydžio kampo *kosinusu*:

$$\cos v = \frac{x}{10}.$$

Pavyzdžiui, iš brėžinio randame, kad

$$\cos 30^\circ \approx \frac{8{,}7}{10} = 0{,}87.$$



801

Kampo sinusą ir kosinusą galima taip pat rasti ir kišeniniu skaičiuokliu. Dauguma kišeninių skaičiuoklių turi specialius klavišus SIN ir COS kampų sinusams ir kosinusams skaičiuoti. Pirmiausia įvedamas kampas, po to paspaudžiamas SIN arba COS klavišas.

Surinkus [30] [SIN], skaičiuoklio švieslentėje pasirodys skaičius 0,5. O surinkus [30] [COS] – skaičius 0,866.

Skaičiuokliu galima atlikti ir priešingą veiksmą – žinant sinuso ar kosinuso reikšmę, rasti kampą. Pavyzdžiui, jeigu duota, kad kampo sinusas yra 0,5, tai surinkę 0,5 ir tuomet paspaudę [INV] [SIN], galime rasti, koks jį atitinka kampas. Surinkus 0,5 [INV] [SIN], skaičiuoklio švieslentėje pasirodys 30. Surinkę 0,866 [INV] [COS], taip pat gauname 30.

802 803 804

Stačiausias kelias, koks tik gali būti, yra vertikalus; tada pakilimo aukštis yra didžiausias ir lygus kelio ilgiui. Tai reiškia, kad didžiausia sinuso reikšmė yra 1.

Kai kelias horizontalus, pakilimas yra mažiausias, jis lygus 0. Tokiu atveju $\sin \nu = 0$.

Su visais kampais ν intervale nuo 0° iki 90° yra teisinga nelygybė $0 \leqslant \sin \nu \leqslant 1$.

Paveiksle taip pat matyti, kad didžiausia kosinuso reikšmė yra 1 – kai kampas lygus 0°. Mažiausia kosinuso reikšmė yra 0 – kai kampas lygus 90°.

Su visais kampais ν intervale nuo 0° iki 90° yra teisinga nelygybė $0 \leqslant \cos \nu \leqslant 1$.

8.2. Trikampių sprendimas

Sinusai ir kosinusai taikomi daug kur – pavyzdžiui, naudojantis sinusais ir kosinusais, galima rasti reikiamus stačiųjų trikampių elementus. Ši taikymų sritis vadinama *trigonometrija* (graikų k. *trigōnon* – trikampis, *metreō* – matuoju), o sinusas ir kosinusas dar vadinami trigonometrinėmis funkcijomis. Trigonometrija dažnai naudojama žemės matavimuose.

Kad galėtume pasinaudoti trigonometrinėmis funkcijomis kampams skaičiuoti, reikia geriau susipažinti su stačiojo trikampio kampų ir jo kraštinių sąryšiais.

Jau žinome, kad bet kokio trikampio kampų suma yra 180°, tad stačiojo trikampio smailiųjų kampų A ir B suma lygi 90° (žr. brėžinį kitame puslapyje). Be to, stačiojo trikampio kraštines sieja Pitagoro teorema:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

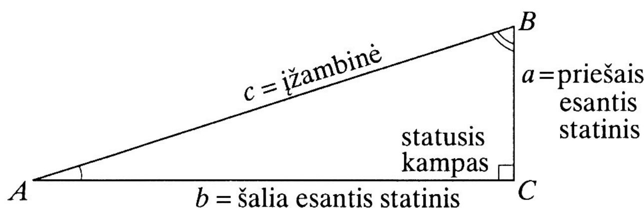
Pasinaudodami sinusais ir kosinusais, galime atrasti naujų sąryšių, į kuriuos įeitų ir kampas. Pavaizduotoje figūroje suvokdami CB kaip kelio atkarpos AB aukštį, matome, kad kelio kilimas procentais bus $\frac{a}{c} \cdot 100\%$ ir

$$\sin A = \frac{a}{c}.$$

Taip pat matyti, kad

$$\cos A = \frac{b}{c}.$$

Šiuos sąryšius dažnai patogu formuluoti žodžiais. Tam reikia parinkti pavadinimus stačiojo trikampio kraštinėms. Stačiu kampu susikertančios kraštinės a ir b vadinamos *statiniais;* kraštinė c, esanti priešais statųjį kampą, vadinama *įžambine.* Kad galėtume tuos statinius atskirti, atkreipsime dėmesį į tai, kad kampo A atžvilgiu a yra *priešais esantis* statinis, o b – *šalia esantis* statinis.



Tuomet taisykles galima formuluoti šitaip:

Sinuso skaičiavimo taisyklė

Stačiojo trikampio smailiojo kampo sinusas lygus priešais kampą esančiam statiniui, padalytam iš įžambinės:

$$\sin v = \frac{\textit{priešais esantis statinis}}{\textit{įžambinė}},$$

t. y. $\sin A = \dfrac{a}{c}$ ir $\sin B = \dfrac{b}{c}$.

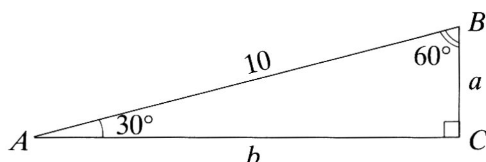
Kosinuso skaičiavimo taisyklė

Stačiojo trikampio smailiojo kampo kosinusas lygus šalia kampo esančiam statiniui, padalytam iš įžambinės:

$$\cos \nu = \frac{\textit{šalia esantis statinis}}{\textit{įžambinė}},$$

$$\text{t. y.} \quad \cos A = \frac{b}{c} \quad \text{ir} \quad \cos B = \frac{a}{c}.$$

Pavyzdys
Kai žinomi stačiojo trikampio kampai ir įžambinė, taikant sinuso apibrėžimą, galima rasti ir statinius. Imkime statųjį trikampį, kurio $A = 30^\circ$, $B = 60^\circ$ ir $c = 10$.



Tuomet statinius randame šitaip:

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{10} \Leftrightarrow a = 10 \cdot \sin 30^\circ = 10 \cdot 0{,}5 = 5.$$

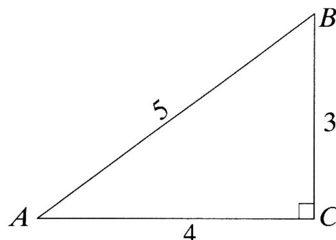
$$\sin 60^\circ = \frac{b}{10} \Leftrightarrow b = 10 \cdot \sin 60^\circ \approx 10 \cdot 0{,}866 = 8{,}66.$$

Pavyzdys
Ar teisingai apskaičiavome, patikriname pagal Pitagoro teoremą:

$$a^2 + b^2 \approx 5^2 + 8{,}66^2 \approx 25 + 74{,}99 = 99{,}99.$$

Ištraukę kvadratinę šaknį gauname $c = \sqrt{99{,}99} \approx 10{,}0$ – tai atitinka sąlygoje nurodytą vertę. Apytikslės lygybės mūsų skaičiavimuose atsirado todėl, kad naudojome apytikslę $\sin 60^\circ$ vertę.

Pavyzdys
Kai duotos trys kraštinės, naudojantis kosinusais arba sinusais galima rasti kampus. Imkime statųjį trikampį, kurio kraštinių ilgiai tokie: $a = 3,\ b = 4$ ir $c = 5$.
Apskaičiavę kosinusus gauname:



$$\cos A = \frac{4}{5} \quad \text{ir} \quad \cos B = \frac{3}{5}.$$

Šiuokart žinome kosinusus, o reikia rasti kampus. Pirmiausia apskaičiuojame 4/5, tuomet spaudžiame skaičiuoklio [INV] [COS] klavišus. Rezultatai bus tokie:

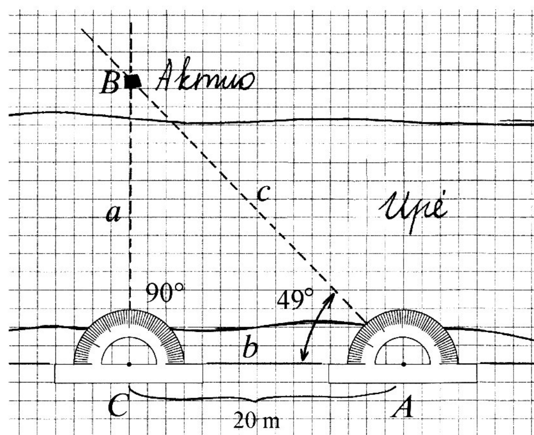
$$\angle A \approx 36{,}87^\circ \quad \text{ir} \quad \angle B \approx 53{,}13^\circ.$$

Norėdami patikrinti, ar teisingai apskaičiavome, sudedame abu kampus ir gauname, kaip tikėtasi:

$$\angle A + \angle B \approx 90^\circ.$$

Pavyzdys
Kai duoti du kampai ir kraštinė, naudodamiesi kosinusų ir sinusų taisykle, galime rasti kitas dvi trūkstamas kraštines.
Mums reikia nustatyti upės plotį. Stovėdami ant kranto paieškokime kitoje upės pusėje tiesiai priešais ryškaus orientyro. Tarkime, mums pasisekė – kitame krante pastebėjome keturkampį akmenį; piešinyje jis pažymėtas raide B, o mūsų padėtis – C. Paeikime krantu statmena BC kryptimi, pavyzdžiui, 20 metrų ir sustokime taške A. Dabar teks išmatuoti kampą, kurį sudaro kryptys AC ir AB. Tegu jis lygus 49° (žr. pav. kitame puslapyje). Kadangi žinome stačiojo trikampio statinį ir kampą prie jo, galime rasti atstumą nuo A iki B (trikampio įžambinę c):

$$\cos 49^\circ = \frac{20}{c} \Leftrightarrow c \cdot \cos 49^\circ = 20 \Leftrightarrow c = \frac{20}{\cos 49^\circ} \approx 30{,}5 \text{ metrų}.$$

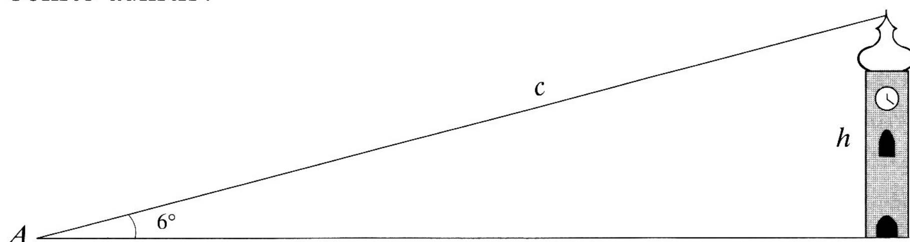


O dabar panaudoję sinuso apibrėžimą, nesunkiai randame ir antrąjį statinį, t. y. upės plotį a:

$$\sin 49^\circ = \frac{a}{30{,}5} \Leftrightarrow a = 30{,}5 \cdot \sin 49^\circ \approx 23 \text{ metrų.}$$

805 806 807 808

Pavyzdys
Žiūrint iš 200 m atstumo, bokšto viršūnė matoma 6° kampu. Koks bokšto aukštis?



Šį uždavinį galime spręsti naudodamiesi sinusais ir kosinusais: iš piešinėlio matyti, jog žiūrint iš taško A, bokšto aukštis – priešais esantis statinis, o nuotolis iki bokšto – šalia esantis statinis. Iš pradžių rasime įžambinės ilgį:

$$\cos 6^\circ = \frac{200}{c} \Leftrightarrow c = \frac{200}{\cos 6^\circ} \approx 201{,}11.$$

O dabar panaudoję sinuso apibrėžimą, apskaičiuosime bokšto aukštį:

$$\sin 6^\circ \approx \frac{h}{201{,}11} \Leftrightarrow h \approx 201{,}11 \cdot \sin 6^\circ \approx 21{,}02.$$

Taigi bokšto aukštis yra apie 21 m.

Tangentas

Dažnai trikampių elementus lengviau skaičiuoti naudojant dar vieną trigonometrinę funkciją. Ta funkcija vadinama *tangentu.*

Stačiojo trikampio smailiojo kampo tangentas lygus priešais esančiam statiniui, padalytam iš šalia esančio statinio:

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{\textit{priešais esantis statinis}}{\textit{šalia esantis statinis}},$$

$$\text{t. y. } \operatorname{tg} A = \frac{a}{b} \quad \text{ir} \quad \operatorname{tg} B = \frac{b}{a}.$$

Atkreipkite dėmesį, kad teisinga lygybė

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A};$$

iš tikrųjų

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} A.$$

Tad uždavinį su bokštu dabar galime išspręsti ir šitaip:

$$\operatorname{tg} 6^\circ = \frac{h}{200} \Leftrightarrow h = 200 \cdot \operatorname{tg} 6^\circ \approx 21{,}02\,\text{m}.$$

809 810 811 812 813

8.3. Šviesos lūžimo dėsnis

Kaip kitokį trigonometrinių funkcijų taikymo pavyzdį panagrinėsime šviesos lūžimą.

Banga, pavyzdžiui, šviesos, pasiekusi ribą tarp dviejų skirtingų aplinkų, skyla į dvi dalis. Viena dalis atsispindi, o kita, patekusi į naująją aplinką, toliau jau sklinda kita kryptimi. Sakoma, kad banga lūžta.

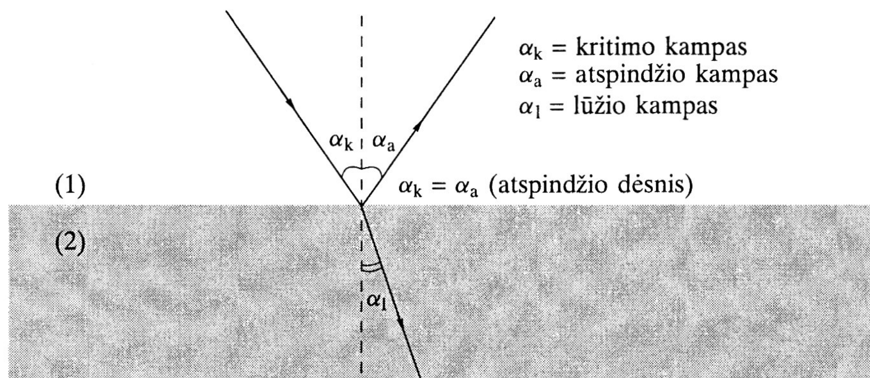
Šviesa lūžta dėl to, kad skirtingose aplinkose ji sklinda skirtingu greičiu. Galima įrodyti, kad teisingas toks sąryšis:

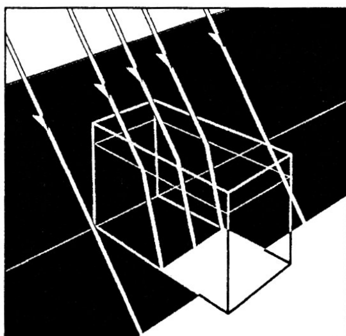
$$\frac{\sin \alpha_k}{\sin \alpha_l} = \frac{v_1}{v_2},$$

čia v_1 ir v_2 yra šviesos greičiai atitinkamai pirmoje ir antroje aplinkose (žr. šviesos lūžimo teoriją 177 p.). Dviejų bangos sklidimo greičių santykis dar vadinamas *lūžio rodikliu* ir žymimas raide n. Todėl šviesos lūžimo dėsnį galima užrašyti ir šitaip:

$$\frac{\sin \alpha_k}{\sin \alpha_l} = n.$$

Šį šviesos lūžimo dėsnį nesunku įrodyti eksperimentiškai.





Pastačius už ekrano akvariumą su vandeniu, galima matyti, kaip vandenyje lūžta šviesa – daliai šviesos sklindant vandeniu, ir daliai – už akvariumo, ekranas meta nevienodo ilgio šešėlį. Taip pat nesunku išmatuoti kritimo bei lūžio kampus ir iš čia nustatyti vandens lūžio rodiklį.

Seniausi mėginimai nustatyti lūžio rodiklį siekia dar antiką – senovės graikai lūžimo dėsnį žinojo tik *mažiems* kampams, jį supaprastintai galima užrašyti lygybe $\alpha_k/\alpha_l = n$. Taigi buvo apsieita be sinuso, kuris įvestas vėliau. Štai Ptolemajas (apie 150 m. po Kr.), atlikęs vienus pirmųjų *fizikos eksperimentų*, nustatė, kad lūžio rodikliai, kai šviesa praeina oro, dujų ir vandens ribas, apytiksliai lygūs tokioms trupmenoms:

Riba	Oras–vanduo	Oras–dujos	Dujos–vanduo
Lūžio rodiklis	4/3	3/2	8/9

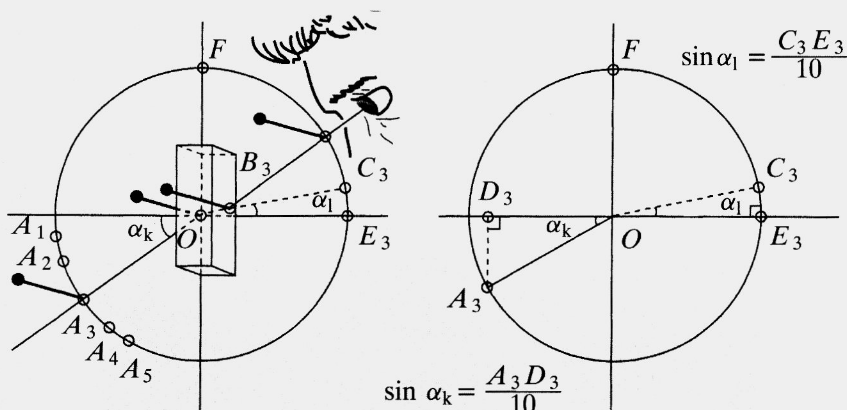
814



Ši fotografija vaizduoja optinį efektą, atsirandantį dėl šviesos lūžimo. Spinduliai nuo daiktų virš vandens į akį patenka tiesiomis linijomis, o nuo povandeninių – lūžę. Tačiau akis ir pastaruosius regi taip, lyg jie būtų sklidę tiesėmis. Todėl povandeniniai daiktai atrodo pasislinkę.

Eksperimentas: Šviesos lūžimas stiklo prizmėje

Šviesai pereinant iš oro į stiklą, lūžio rodiklį galima išmatuoti šitaip. Ant milimetrinio popieriaus nubraižomas 10 cm spindulio apskritimas ir ant jo atidedami penki taškai $A_1, \ldots, A_5$ – maždaug taip, kaip pavaizduota piešinėlyje. Taškai sujungiami linijomis su centru O. Į pirmąjį šių taškų A_1 įsmeigiamas smeigtukas, dar vienas smeigtukas – į apskritimo centrą O, o išilgai OF padedama stiklo prizmė.



Dabar mes jau pasirengę eksperimentui. Žiūrėkite pro prizmę į tuos du smeigtukus – centre O ir taške A_1 – taip, kad pamatytumėte juos vienoje tiesėje. Tuomet įsmeikite vieną smeigtuką prie prizmės, o kitą – šiek tiek toliau taip, kad jie atrodytų esą vienoje tiesėje su pirmaisiais. Sujungę linija šiuos du naujuosius smeigtukus, rasite milimetriniame popieriuje spindulio eigą, o kartu ir tą tašką B_1, kur spindulys išeina iš prizmės. Atidžiai pasižymėkite šį tašką B_1. Būtent ši kryptis OB_1 ir yra spindulio eigos prizmėje kryptis.

Dabar perkelkite smeigtuką iš taško A_1 į tašką A_2 ir pakartokite visą procedūrą iš naujo. Galiausiai nuėmę prizmę, nubrėžkite linijas OB_1, OB_2 ir t. t., jos kirs vienetinį apskritimą taškuose $C_1, \ldots, C_5$. Iš tokio brėžinio galima tiesiogiai apskaičiuoti visų penkių spindulių tiek $\sin\alpha_k$, tiek ir $\sin\alpha_l$. Nustatę A taškų atstumus iki x ašies (aukštyn) ir C taškų atstumus iki x ašies (žemyn) ir padalijęs juos iš apskritimo spindulio (lygaus 10), gausime atitinkamų kritimo bei lūžio kampų sinusų reikšmes. Gautuosius rezultatus patogu surašyti į tokią lentelę:

	$A_1-B_1-C_1$	$A_2-B_2-C_2$	$A_3-B_3-C_3$	$A_4-B_4-C_4$	$A_5-B_5-C_5$
$\sin\alpha_k$					
$\sin\alpha_l$					
$\frac{\sin\alpha_k}{\sin\alpha_l}$					

Tuomet apskaičiavę penkiems spinduliams santykį $\sin\alpha_k / \sin\alpha_l$, randame šviesos lūžimo stiklo prizmėje rodiklį.

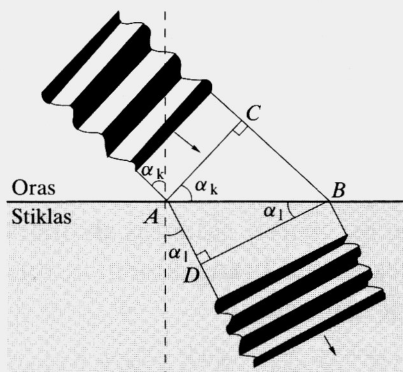
Pratimas

Ore šviesa sklinda 300 000 km/s greičiu. Kokiu greičiu šviesa sklinda stiklo prizmėje?

Šviesos lūžimo teorija

Šviesos lūžimo dėsnį galima išvesti teoriškai, kaip konkretų pavyzdį išnagrinėjus šviesos lūžimą stikle. Ore šviesa sklinda 300 000 km/s greičiu, o stikle – 200 000 km/s. Todėl šviesos greičių ore ir stikle santykis yra

$$\frac{v_{ore}}{v_{stikle}} = \frac{300\,000}{200\,000} = \frac{3}{2}.$$



Šviesa krinta į stiklą kampu α_k, kurį trikampyje ABC atitinka kampas A. Todėl kritimo kampo sinusas lygus:

$$\sin\alpha_k = \frac{\text{priešais esantis statinis}}{\text{įžambinė}} = \frac{BC}{AB}.$$

Šviesa prizmėje lūžta kampu b, kurį trikampyje ABD atitinka kampas B. Todėl lūžio kampo sinusas lygus:

$$\sin\alpha_l = \frac{\text{priešais esantis statinis}}{\text{įžambinė}} = \frac{AD}{AB}.$$

Kadangi įžambinė AB bendra abiems trikampiams, tai padalijus vieną lygybę iš kitos, ji išnyksta. Gauname:

$$\frac{\sin\alpha_k}{\sin\alpha_l} = \frac{BC/AB}{AD/AB} = \frac{BC}{AD}.$$

Per tą laiką, kol nelūžusioji banga nusklinda nuo C iki B, lūžusioji nukeliauja nuo A iki D. Kadangi nelūžusios bangos greitis v_1 (ore) yra pusantro karto didesnis nei lūžusios greitis v_2 (stikle), tai nelūžusioji banga per tą patį laiką nukeliauja pusantro karto toliau. Vadinasi, dešinioji lygybės pusė BC/AD reiškia ir tų dviejų greičių santykį. Taigi įrodėme, kad

$$\frac{BC}{AD} = \frac{3}{2}.$$

O dabar iš šių dviejų rastųjų lygybių galime gauti šviesos lūžimo stikle dėsnį:

$$\frac{\sin\alpha_k}{\sin\alpha_l} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{2}.$$

Matome, kad lūžio rodiklis šiuo atveju yra $\frac{3}{2}$.

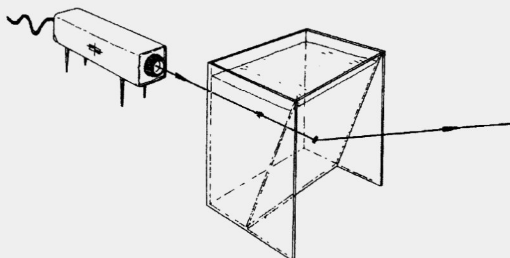
Šviesai pasiekus laužiančiąją medžiagą, dalis spindulio lūžta, dalis atsispindi. Lūžio rodiklis nulemia ne tik kampą, kuriuo šviesa lūžta, bet ir tai, kiek jos lūžta, o kiek atsispindi. Juo didesnis lūžio rodiklis, juo daugiau šviesos atspindima. Tai lemia medžiagos *spindesį*. Sakoma, kad mineralai (brangakmeniai), kurių lūžimo rodiklis daugiau nei 1,8, pasižymi *deimantiniu spindesiu,* o mineralai (brangakmeniai), kurių lūžio rodiklis mažesnis kaip 1,8 – *stiklo spindesiu.*

815

Lūžio rodiklis priklauso nuo bangos ilgio, kitaip sakant, šviesos spalvos. Todėl balta šviesa, lūždama stiklo prizmėje, išsiskaido į skirtingas spalvas. Skirtumas tarp raudonos ir violetinės spalvos lūžio rodiklių vadinamas *spalvų sklaida.* Deimantai turi didelę spalvų sklaidą (0,044). Palyginkite: stiklo spalvų sklaida 0,015, o vandens – 0,013. Dėl didelės spalvų sklaidos deimantai spindi, žaižaruoja lyg liepsna. Dažnai bespalviai brangakmeniai, turintys didelę spalvų sklaidą, naudojami vietoj briliantų.

Skysčio lūžio rodiklio matavimas

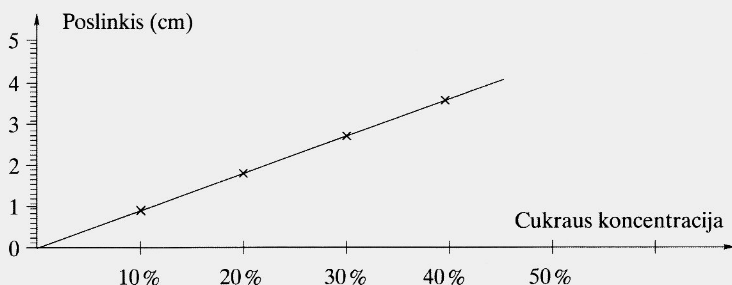
Norint išmatuoti skysčio lūžio rodiklį, galima pasinaudoti skysčių refraktometru. Paprasčiausias refraktometras sudarytas iš stiklinio akvariumo, kurio viena sienelė įtaisyta įžambiai.



Skystis, kurį norima tirti, įpilamas į akvariumą. Lazerio spindulys, perėjęs skystį, lūžta išeidamas pro įstrižą sieną ir už 2–3 metrų nuo akvariumo yra sugaunamas. Panaudosime skysčių refraktometrą cukraus kiekiui, pavyzdžiui, vaisvandeniuose išmatuoti. Visiškai analogiškai bitininkai, matuodami medaus lūžio rodiklį, refraktometru nustato cukraus kiekį meduje.

Iš pradžių ištirpinę 400 g cukraus 600 gramuose vandens paruoškime 40% koncentracijos tirpalą. Praskieskime jį – pripildykime 4 stiklines atitinkamai 10%, 20%, 30% ir 40% koncentracijos tirpalo (reikia gerai apgalvoti, kaip tirpalą skiesti).

Praleidę lazerio spindulį per distiliuotą vandenį, taip pat per 10%, 20%, 30% ir 40% koncentracijos cukraus tirpalus, ant sienos pasižymėkime vietas, į kurias pataikė iš prietaiso išėję spinduliai. Išmatuokime cukraus tirpalus atitinkančių taškų atstumus iki distiliuotą vandenį atitinkančio taško. Šitaip gausime keturias cukraus koncentracijos vertes atitinkančius atstumus (centimetrais).

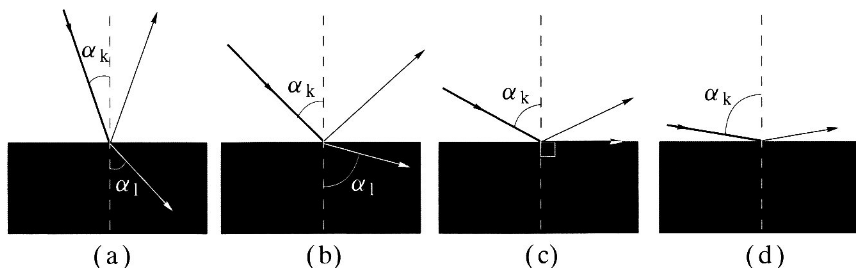


Pažymėję šias reikšmių poras koordinačių plokštumoje, gauname keturis taškus, išsidėsčiusius vienoje tiesėje. Dabar ištirkime nežinomos koncentracijos cukraus tirpalą (pvz., vaisvandenius). Nukreipkime į jį lazerio spindulį, išmatuokime spindulio dėmelės ant sienos poslinkį ir grafike raskime cukraus koncentraciją.

816

8.4. Visiškas atspindys

Šviesos lūžimo dėsnis paaiškina daug neįprastų reiškinių, pavyzdžiui, *visišką atspindį.* Kad galėtume jį suprasti, pirmiausia atkreipkime dėmesį į tai, kad jei greitis laužiančioje aplinkoje v_2 yra didesnis už v_1, lūžio kampas bus visuomet didesnis už kritimo kampą.

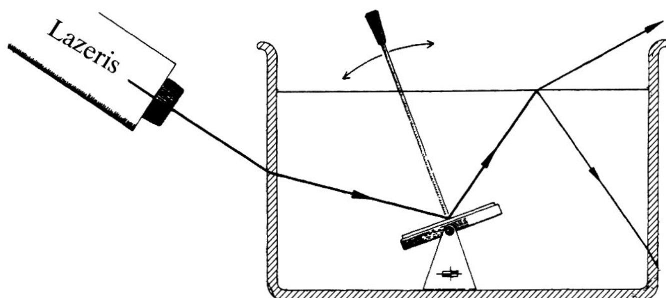


Kritimo kampą vis didinant, lūžio kampas galiausiai pasieks didžiausią įmanomą vertę – 90°. Jį atitinkantis kritimo kampas vadinamas *ribiniu visiško atspindžio kampu.* Kritimo kampui esant didesniam už ribinį visiško atspindžio kampą, spindulys nebelūžta, taigi jis visiškai atsispindi. Tai vadinama *visišku atspindžiu.*

Ribinį visiško atspindžio kampą α_r galima rasti šitaip. Kadangi lūžio kampas čia yra 90°, o $\sin 90° = 1$, tai iš lūžimo dėsnio turime:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\alpha_r}{\sin 90^\circ} = \frac{\sin\alpha_r}{1} = \sin\alpha_r.$$

Visišką atspindį nesunku pademonstruoti akvariume su vandeniu, į kurį įpilta šiek tiek fluoresceino. Sukiojamu vandenyje veidrodėliu keičiamas nuo jo į vandens paviršių krintančios šviesos kritimo kampas.



Tokiu eksperimentu nesunku išmatuoti ribinį visiško atspindžio kampą vandenyje ir rasti lūžio rodiklį pereinant šviesai iš vandens į orą.

Pavyzdys
Šiame pavyzdyje panagrinėsime garso bangas. Skysčiuose ir kietosiose medžiagose garsas sklinda kur kas greičiau nei ore. Pavyzdžiui, geležinkelio bėgiai ima gausti dar gerokai prieš pasigirstant (ar pasirodant) traukiniui. Vandenyje garsas sklinda apie 1500 m per sekundę greičiu, o jo greitis ore – apie 340 m per sekundę, tad ribinis visiško atspindžio kampas α_r pereinant garsui iš oro į vandenį bus:

$$\sin\alpha_\mathrm{r} = \frac{340}{1500} = 0{,}2267 \Leftrightarrow \alpha_\mathrm{r} \approx 13{,}1^\circ.$$

Kai įsibridę į vandenį žvejai kalbasi tarpusavyje, į vandenį patenka tik daugmaž vertikaliai žemyn sklindantys garsai. Tad žvejai kuo ramiausiai gali sau šnekėtis – dėl visiško atspindžio į vandenį prasiskverbs tokia maža dalis garsų, kad žuvys nieko negirdės.



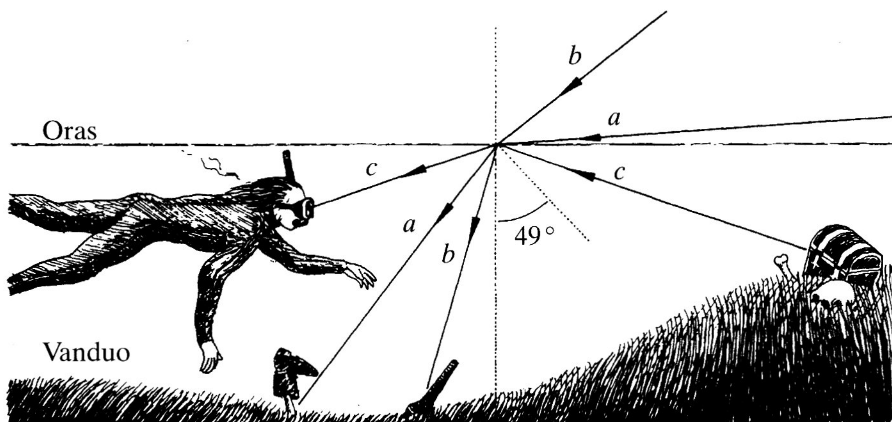
Plaukymo baseine ir patys galite pasinerti ir pabūti su žuvimis. Jei kas nors stovėtų virš vandens ir ką nors jums sakytų, tai šį tą girdėtumėte tik būdami tiesiai po kalbančiuoju.

Pavyzdys

Ne taip kaip garsas, šviesa greičiau sklinda ore (o visų greičiausiai – tuščioje erdvėje). Šįkart rasime ribinį visiško atspindžio kampą pereinant šviesai iš vandens į orą. Lūžio rodiklis pereinant iš oro į vandenį yra apie $4/3$, todėl ribinis visiško atspindžio kampas α_{r} čia bus

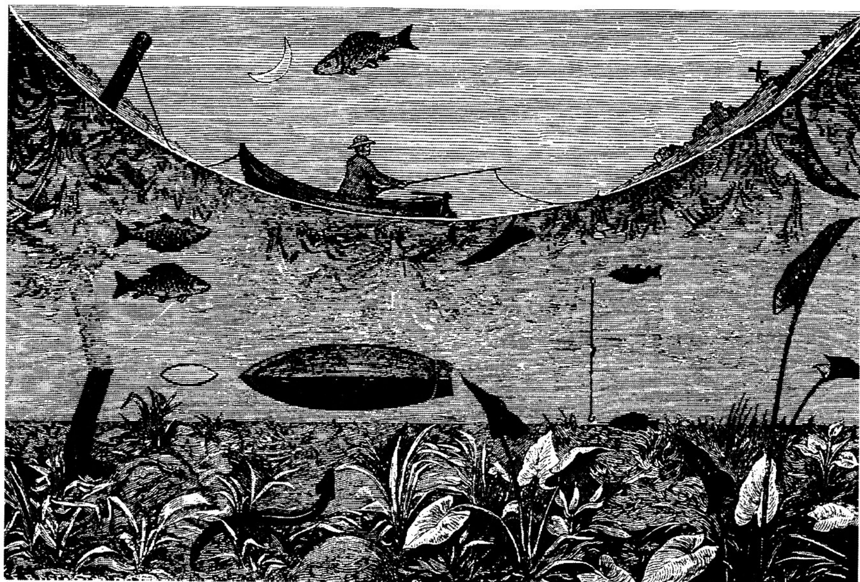
$$\sin\alpha_{\mathrm{r}} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \alpha_{\mathrm{r}} \approx 48{,}6^{\circ}.$$

Šviesa, sklindanti iš viršaus, daugių daugiausia galės lūžti 49° kampu. Todėl plaukiant po vandeniu ir žvelgiant į viršų, aplinką virš vandens, galima matyti tik ne didesniu kaip 49° kampu. Užtat viską, kas yra virš vandens, šio kampo ribose matysime žuvies akimis. Vaizdo vidurys bus normalus, o kraštai smarkiai iškreipti. Apie šį kūgį vanduo bus lyg veidrodis, ir jame naras matys dugno atspindį. Mat didesniu nei 49° kampu iš apačios sklindančią šviesą vandens paviršius visiškai atspindi. Tokį veidrodžio efektą galima stebėti akvariumuose ar zoologijos soduose (pvz., prie ruonių ar pingvinų Klaipėdos delfinariume).

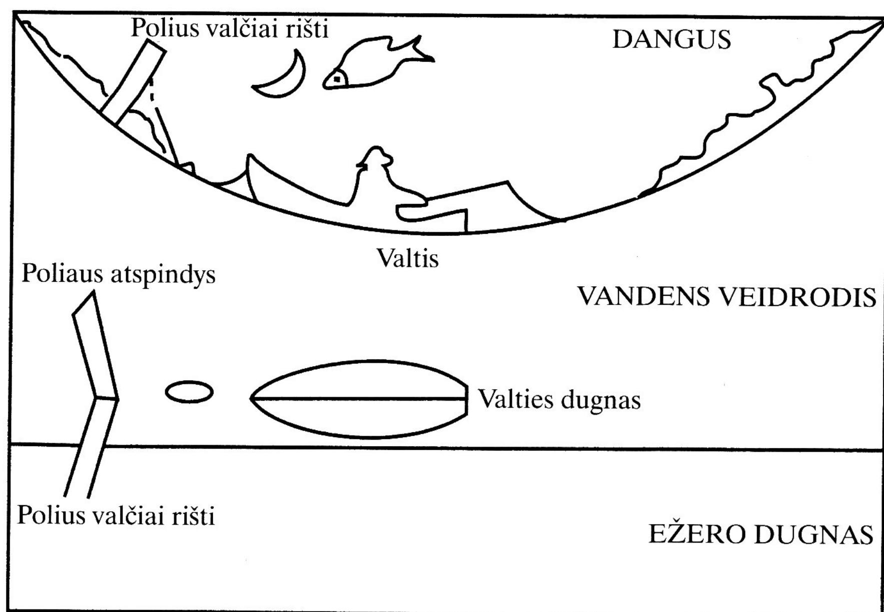


817 818 819

Pratimas: Pasaulis žuvies akimis

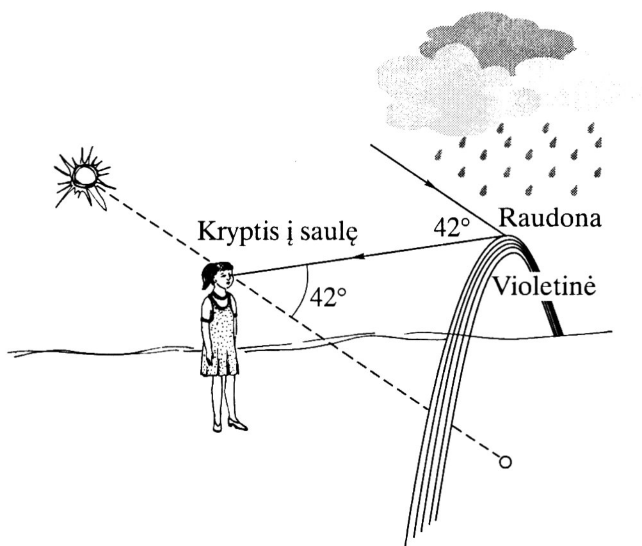


a) Paveikslėlyje yra viena žuvis, kurios atspindžio nematyti. Kuri tai žuvis? Ir kodėl nėra jos atspindžio?
b) Tarp valties ir poliaus valčiai rišti matyti nedidelis ovalas. Ką jis atitinka?
c) Vieną žuvį tuoj sugaus. Kurią?



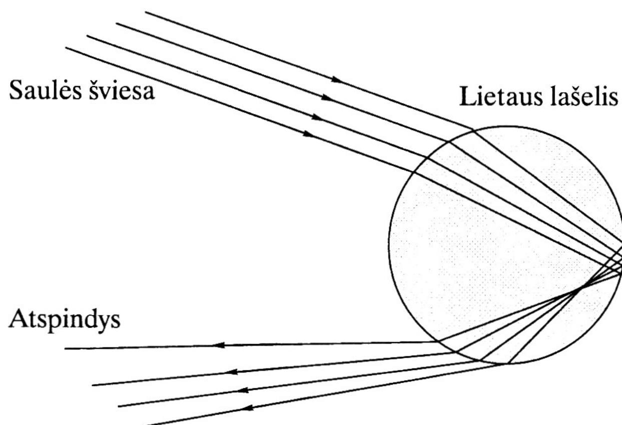
8.5. Vaivorykštė

I dalies 10.5 skirsnyje nagrinėjome pagrindinius vaivorykštei būdingus dėsningumus. Vaivorykštė visuomet sudaro apskritimo lanką, kurio centras yra Saulę ir stebėtojo akį jungiančioje tiesėje. Kampas tarp krintančio į vaivorykštę spindulio ir atspindėtojo spindulio esti apie 42°. Raudona spalva būna viršuje, o violetinė – apačioje.



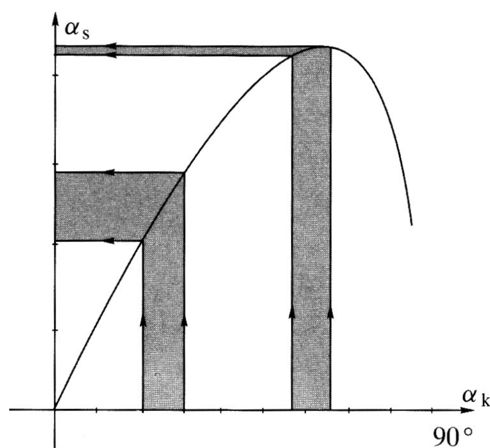
Dabar trumpai aptarsime, kaip vaivorykštės susidarymą galima paaiškinti Saulės šviesos lūžimu ir atsispindėjimu nuo lietaus lašelių. Labiau į tai įsigilinti galėsite atlikdami 819 ir 820 užduotis.

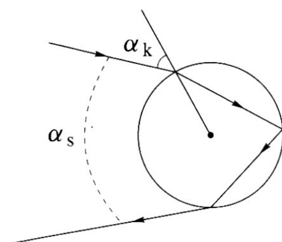
Patekusi į lietaus lašelį, šviesa atsispindi įvairiausiomis kryptimis.



Todėl iš principo Saulės atspindžiai turėtų būti matomi įvairiausiomis kryptimis, tačiau praktiškai matome tik tą šviesą, kuri atspindima intensyviausiai.

Pasirodo, jog taip esti ta kryptimi, kur kampas tarp krintančių Saulės spindulių ir atspindėtųjų – vadinamasis sklaidos kampas – yra didžiausias. Tai suprasime pažvelgę į priklausomybės tarp kritimo kampo α_k ir sklaidos kampo α_s grafiką. Jis atrodo šitaip:





Sklaidos kampas išauga iki maksimumo ir po to vėl mažėja. Grafike matyti, jog viršuje ties maksimalia sklaidos kampo verte spinduliai atspindimi ypač siauru pluošteliu – taigi čia Saulės šviesos atspindys esti intensyviausias.

Paaiškinti vaivorykštės susidarymą galima tik perpratus spindulių eigą lietaus lašelyje. O tai pasidarė įmanoma po to, kai nyderlandų matematikas V. Snelas* atrado šviesos lūžimo dėsnį. Įdomu pažymėti, kad Snelas yra ne tik trigonometrijos taikymo optikoje pradininkas, bet ir žemės matavimo principo kūrėjas: sudarant žemėlapius vietovė *trianguliuojama* (suskaidoma į trikampius), išmatuojama viena trikampio kraštinė ir kampai prie jos, po to naudojantis trigonometrija apskaičiuojamos kitos kraštinės.

819 820

* *Wilebrod Snell (Snellius) van Royen* (1580–1620). Lūžimo dėsnio formulė rasta jo rankraščiuose 1621 m., jau po mokslininko mirties.

9. Sėkmių skaičius

9.1. Įvadas

1968 sausio 21 d. prie Tulės bazės Grenlandijoje nukrito amerikiečių bombonešis su vandenilinėmis bombomis, ir po didelę teritoriją pasklido radioaktyviosios medžiagos. Po dvidešimties metų išaiškėjo, kad kai kurie iš ten dalyvavusių likviduojant avarijos padarinius žmonių po kurio laiko susirgo leukemija (kraujo vėžiu).

VĖŽIO GRĖSMĖ PO LĖKTUVO SUDUŽIMO

Daug susirgusių po amerikiečių bombonešio avarijos Tulėje

Susana Zehngraff

Beveik prieš 20 metų giedrą popietę juodame poliariniame danguje virš Tulės bazės skaisčiai švietė mėnulis, bet ore jau tvenkėsi nelaimės debesys.

1968 sausio 21 d. 12 km į vakarus nuo amerikiečių radarų bazės Tulėje, šiaurės vakarų Grenlandijoje, ant salos ledynų nukrito amerikiečių lėktuvas B52 su keturiomis vandenilinėmis bombomis.

Į orą, ledynus ir jūrą buvo paskleista radioaktyviųjų medžiagų – plutonio, tričio – t. y. radioaktyviojo vandenilio, taip pat galbūt urano. Kiekvienoje bomboje veikiausiai buvo po 4 kg plutonio – pavojingiausio iš visų radioaktyviųjų elementų, tad į aplinką, matyt, bus patekę 16 kg vien šios mirtinai pavojingos medžiagos.

Tuoj po nelaimės iš bazės šunų kinkiniais bei malūnsparniais atskubėjo amerikiečiai, o po kelių dienų atvyko pasirengę likviduoti radioaktyviąsias medžiagas specialistai. Gesinant gaisrą, tvarkant aplinką, šalinant sniegą ir lėktuvo nuolaužas, taip pat dalyvavo bazėje dirbę danai bei 12 kalinių iš Tulės seniūnijos.

...

Tiesiogiai likviduojant avarijos padarinius darbavosi apie 130 danų, dar daugiau žmonių dirbo vėliau, ir iš viso per laikotarpį nuo lėktuvo katastrofos iki oficialios tvarkymo darbų pabaigos rugsėjo viduryje bazėje dirbo 1202 danai.

Nūnai daug jų serga, daug kitų nuogąstauja susirgsią, nes, pavyzdžiui, kepenų vėžys pasireiškia tik praėjus ne mažiau kaip 20 metų nuo tada, kai organizmą paveikė plutonis.

Danijos klinikinės epidemiologijos institutas (DKEI), atlikęs tyrimus vienodose grupėse, 1987 sausį priėjo išvadą, kad dirbusiųjų Tulėje ir kitų Danijos gyventojų mirtingumas toks pat. O praeitą rudenį tyrimai, atlikti su dirbusiųjų Tulėje grupe, parodė, kad jų mirtingumas lyginant su kitų danų yra didesnis, visų pirma, dėl plaučių vėžio ir savižudybių. Taip pat buvo nustatyta 40% daugiau susirgimų vėžiu tarp dirbusiųjų bazėje likviduojant avarijos padarinius nei tarp dirbusiųjų bazėje kitu metu. Ir vis dėlto „statistiškai šis skirtumas nėra tiek patikimas, kad būtų galima teigti jį esant reikšmingu,“ – sakoma DKEI pareiškime spaudai.

Kaip matyti iš laikraščio ištraukos, susirgimų vėžiu tarp dirbusiųjų Tulės bazėje likviduojant avarijos padarinius nustatyta 40% daugiau nei tarp dirbusiųjų bazėje kitu metu. Ir vis dėlto ištraukoje taip pat teigiama, kad šis skirtumas statistiškai nėra tiek didelis, kad DKEI galėtų laikyti jį reikšmingu.

Šis pavyzdys iliustruoja tipišką problemą, su kuria nuolat ir nuolat susiduriame taikydami statistiką. Turime populiaciją iš N individų (čia – dirbančiųjų Tulės bazėje) ir suskaičiuojame individų su tam tikru požymiu (čia – susirgusių vėžiu) skaičių X. Dabar turime nuspręsti, kokias išvadas, remiantis šiuo skaičiumi, galima padaryti apie požymio dažnumą tiriamoje populiacijoje (juk visuomet egzistuoja tam tikras pavojus apsirgti vėžiu net ir nedirbant Tulės bazėje). Pirmiausia pagal kitus gyventojus reikia nustatyti, kokio susirgimų vėžiu skaičiaus statistiškai galima tikėtis, ir tuomet galime iškart palyginti, ar stebėtasis skaičius yra didesnis už tą, kurio buvo galima tikėtis. Tačiau tai dar ne viskas, nes susirgimų vėžiu skaičius X yra atsitiktinis dydis, svyruojantis apie tą vertę, kurios tikimasi. Todėl taip pat reikia įvertinti, ar tas nukrypimas tikrai toks didelis, kad jo nebūtų galima paaiškinti *atsitiktinumu.*

Kitaip tariant, tam, kad galėtume pasakyti, ar susirgimų vėžiu iš tikrųjų padaugėjo dėl avarijos ir ar tokiu atveju yra pagrindo kelti bylą dėl kompensacijos, reikia žinoti ne tik *vidurkį* (t. y. tą skaičių, kurio galima tikėtis), bet ir *standartinį* nuokrypį.

Toliau pabandysime susisteminti, kaip skaičiuojamas vidurkis ir standartinis nuokrypis, kai norima įvertinti, pavyzdžiui, susirgimų vėžiu tarp dirbusiųjų Tulėje skaičių.

9.2. Binominiai skirstiniai

Kai domimasi individų su tam tikru požymiu skaičiumi, pavyzdžiui, sergančių vėžiu, naudojamasi vadinamuoju *binominiu modeliu,* kurį dabar ir aprašysime.

Tam tikras bandymas – *bazinis eksperimentas* – kartojamas N kartų. Taigi atliekama (arba įsivaizduojama, kad atliekama) *serija* vienodų eksperimentų. Skaičių N vadinsime tiesiog bandymų (arba eksperimentų) skaičiumi. Bazinis eksperimentas gali būti, pavyzdžiui, kauliuko mėtymas tikintis, kad atvirs šeši taškai, arba vėžiu susargdintos pelės gydymas tam tikrais vaistais, stebint, ar ji pasveiks. Atkreipkite dėmesį į tai, kad mus domina tik vienas požymis, išryškėjantis arba neišryškėjantis atlikus

bazinį eksperimentą. Todėl baigčių erdvę galima įsivaizduoti sudarytą tik iš dviejų baigčių, dažnai vadinamų „sėkme“ ir „nesėkme“. Baziniai eksperimentai turi būti atliekami *nepriklausomai* vienas nuo kito, t. y. vieno kurio baigtis jokiu būdu neturi turėti įtakos kitoms baigtims. Todėl palankios baigties (šešetukas/išgijimas/sėkmė/...) tikimybę p kiekvienam eksperimentui galime laikyti vienoda. Skaičių p vadinsime tiesiog *sėkmės tikimybe*. Bandymų, kuriuose sulaukėme sėkmės, skaičių žymėsime raide X ir vadinsime *sėkmių skaičiumi*, atlikus N bandymų. Dydis X yra atsitiktinis; jis gali įgyti reikšmes $0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ N$. Apibendrinsime tai, ką jau išdėstėme.

Apibrėžimas

Binominiu eksperimentu vadinama N nepriklausomai vienas nuo kito atliktų bazinių eksperimentų seka. Baziniu eksperimentu vadinamas bandymas, atitinkantis tokias sąlygas:

1. *Bandymas gali baigtis tik dvejopai – sėkme arba nesėkme.*
2. *Kiekvieną kartą atliekant bandymą, tikimybė sulaukti sėkmės yra ta pati; ji žymima p.*

Bazinių eksperimentų, kurie baigėsi sėkmėmis, skaičius žymimas X. Jis vadinamas sėkmių skaičiumi, atlikus N nepriklausomų bandymų. Sakoma, kad X pasiskirstęs pagal binominį dėsnį, esant bandymų skaičiui N ir sėkmės tikimybei p.



Trylika berniukų iš eilės. Ponas ir ponia Harisonai turi 13 sūnų; statistiškai tai labai retas reiškinys. Tikimybės gimti berniukui arba mergaitei maždaug vienodos, t. y. lygios 1/2. Taigi jei šeima norėtų turėti lygiai 13 berniukų ir nė vienos mergaitės, tai tokio noro išsipildymo tikimybė maždaug lygi 1/8192.

Pratimas

Pirmiausia atliekamas toks eksperimentas:

Kiekvienas mokinys 12 sykių meta kauliuką ir suskaičiuoja savo sėkmių skaičių X, t. y. kiek kartų atvirsta šešetukas.

Pagal bendrus klasės rezultatus sudaroma dažnių lentelė, t. y. surašoma, kiek kartų gautos vertės 0, 1, 2 ir t. t. (žr. I dalies 9.1 skirsnį). Dabar atsakykite į tokius klausimus:

a) Kokia sėkmių skaičiaus X reikšmė pasikartojo daugiausia kartų?

b) Koks yra sėkmių skaičiaus X reikšmių vidurkis?

c) Koks yra sėkmių skaičiaus X standartinis nuokrypis?

Pavyzdys

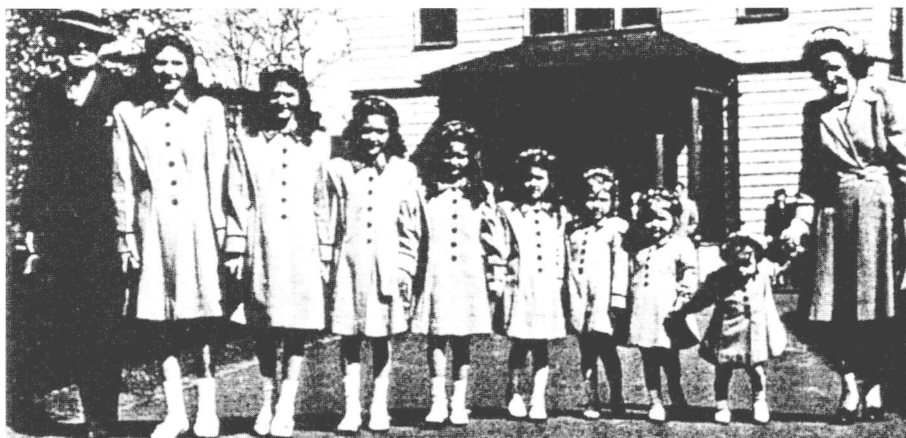
Dabar sudarysime eksperimento su kauliuku iš praeito pratimo modelį. Sėkmės (kad atvirs šešetas) tikimybė yra 1/6. Tai reiškia, kad mėtant kauliuką labai daug kartų, maždaug šeštadalį kartų atvirs šešetas. Todėl metant 12 kartų, galima tikėtis, kad šešetas atvirs $1/6 \cdot 12 = 2$ kartus. Sėkmių skaičiaus vidurkis taip pat yra 2.

Galima apskaičiuoti ir kai kurias tikimybes.

a) $X = 0$.

Kadangi šešetas čia iš viso neatvirto, tai 12 kartų iš eilės patyrėme nesėkmę. Pagal tikimybių daugybos taisyklę (žr. I dalies 9.6 skirsnį) tokio įvykio tikimybė bus šitokia:

$$p(X = 0) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^{12} \approx 11{,}22\%.$$



Aštuonios mergaitės iš eilės. Tikimybė gimti 8 mergaitėms iš eilės yra tik 1/256.

b) $X = 1$.

Šiuo atveju atvirsta vienas šešetas. Galime, pavyzdžiui, išmesti šešetą, ir po to iš eilės 11 ne šešetų. Tokio įvykio tikimybė:

$$p\,(\text{šešetas, ne šešetas, ne šešetas}, \ldots, \text{ne šešetas}) = \\ = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{11} \approx 2{,}24\%.$$

Tačiau šešetas nebūtinai atvirs iš pirmo karto – jis gali atvirsti ir antruoju metimu. Tokio įvykio tikimybė bus:

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{11} \approx 2{,}24\%.$$

Taip pat šešetas gali atvirsti ir trečiuoju metimu, ir ketvirtuoju, ir t. t. O kadangi iš viso šešetui atvirsti yra 12 atvejų, bendra tikimybė bus:

$$p(X = 1) = 12 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{11} \approx 12 \cdot 2{,}24\% \approx 26{,}92\%.$$

c) $X = 2$.

Šiuokart atvirsta du šešetai. Jie galėjo atvirsti dviejuose pirmuosiuose metimuose; tada kituose atvirto ne šešetai. Tokio įvykio tikimybė:

$$p\,(\text{šešetas, šešetas, ne šešetas}, \ldots, \text{ne šešetas}) = \\ = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0{,}45\%.$$

Tačiau panašiai kaip ir ankstesniuoju atveju, du šešetai 12 metimų eilėje gali išsidėstyti įvairiai. Vienas šešetas gali būti bet kurioje iš 12 galimų pozicijų, o kitas – 11 likusiųjų. Atrodytų, šią porą galima išdėstyti $12 \cdot 11 = 132$ būdais. Tačiau neskubėkime – kiekvieną galimybę mes priskaičiavome po du kartus. Įsivaizduokime, kad dvi mergaites, Norą ir Lizą, reikia pastatyti į 12 žmonių eilę. Jeigu dešimt žmonių jau stovi, o mergaites mes norime pastatyti į pirmas dvi vietas, tai galimos dvi skirtingos žmonių eilės: Nora, Liza, ... ir Liza, Nora, ... Tačiau kai metame kauliukus, tokių dviejų galimybių nereikia skirti. Todėl tikrasis šešetų poros išdėstymų 12 metimų eilėje skaičius yra $1/2 \cdot 12 \cdot 11 = 66$. Tuomet bendra tikimybė bus

$$p(X = 2) = \frac{12 \cdot 11}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 66 \cdot 0{,}45\% = 29{,}61\%.$$

O toliau darosi sudėtingiau. Tačiau jau radome 0, 1 ir 2 šešetų tikimybes, todėl galime rasti ir visų kitų likusiųjų baigčių bendrą tikimybę – t. y. tokių baigčių, kuomet gausime daugiau nei 2 šešetus. Juk bendra visų galimų baigčių tikimybė yra 100%, o kadangi mes jau „išnaudojome“ 11,22%, 26,92% ir 29,61%, tai lieka:

$$p(X > 2) \approx 100\% - 11{,}22\% - 26{,}92\% - 29{,}61\% = 32{,}25\%.$$

Galiausiai rasime tikimybę, kad atvirs 12 šešetų:

$$p(X = 12) = \left(\frac{1}{6}\right)^{12} \approx 4{,}6 \cdot 10^{-8}\%.$$

Sudarykime nustatytųjų tikimybių lentelę:

t	0	1	2	...	12
$p(X = t)$	11,22%	26,92%	29,61%	...	$4{,}6 \cdot 10^{-8}\%$

Pratimas
Palyginkite šias tikimybes su eksperimente stebėtais dažniais.

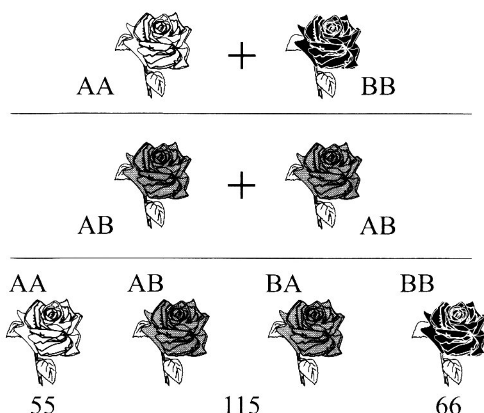
Pateiksime keletą bendrų binominių skirstinių ypatybių (plg. nagrinėtąjį pavyzdį):

Sėkmių skaičiaus X – binomiškai pasiskirsčiusio atsitiktinio dydžio, kai bandymų skaičius yra N, o sėkmės tikimybė p – tikimybes galima rasti, kaip parodyta šioje lentelėje.

t	0	1	2	...	N
$p(X = t)$	$(1-p)^N$	$N \cdot p \cdot (1-p)^{N-1}$	$\frac{1}{2} \cdot N \cdot (N-1) \cdot p^2 \cdot (1-p)^{N-2}$	...	p^N

Be to, jo reikšmių vidurkis yra $m = N \cdot p$, o standartinis nuokrypis $s = \sqrt{N \cdot p \cdot (1-p)}$.

Pavyzdys



Sukryžminus baltą ir raudoną gėles, jų hibridai bus rožiniai. O po to sukryžminus dvi rožines, pagal Mendelio paveldimumo dėsnius, ketvirtis jų palikuonių bus raudonų, ketvirtis baltų, o pusė vėl bus rožinės.
Botanikas sukryžmino dvi rožines gėles ir iš viso gavo $55+115+66 = 236$ palikuones, iš kurių 66 buvo raudonos. Ar tai atitinka Mendelio dėsnius?
Pirmiausia rasime, kokio skaičiaus raudonų buvo galima tikėtis. Pagal Mendelio dėsnius, tikimybė gauti raudoną gėlę lygi $1/4$. Todėl tariame, kad raudonų gėlių skaičius pasiskirstęs binomiškai su sėkmės tikimybe $1/4$ bei bandymų skaičiumi 236. Tuomet galima tikėtis tokio raudonųjų gėlių skaičiaus:

$$m = 236 \cdot \frac{1}{4} = 59.$$

O iš tikrųjų botanikas gavo 66, taigi 7 raudonom gėlėmis daugiau. Ar tai toleruotinas nuokrypis? Tam ištirti apskaičiuokime standartinį nuokrypį:

$$s = \sqrt{N \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{236 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} \approx 6{,}65.$$

Taigi tipiškas nuokrypis nuo vidurkio yra 6–7 raudonos gėlės. Visi nuokrypiai dviejų standartinių nuokrypių ribose, t. y. iki 13–14 gėlių daugiau ar 13–14 gėlių mažiau, yra toleruotini. Bandymo rezultatai atitinka Mendelio dėsnius.

902 903

Binominio skirstinio lentelė

Ligšiol nagrinėjome, kaip *apskaičiuoti* binominio skirstinio tikimybes. Binominių skirstinių tikimybes galima rasti ir *lentelėse.* Tokiose lentelėse būna pateiktos *suminės* tikimybės. Žemiau pavaizduotas tokios lentelės fragmentas, kai bandymų skaičius $N = 50$. Pirmoje eilutėje pateiktos sėkmės tikimybės p, o antroje iš kairės skiltyje surašyti sėkmių skaičiai, kurie lentelėje pažymėti j.

Binominio skirstinio lentelės fragmentas $p(X \leqslant j)$

		p											
N	*j*	0,05	0,10	0,15	1/6	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
50	0	0,0769	0,0052	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,2794	0,0338	0,0029	0,0012	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,5405	0,1117	0,0142	0,0066	**0,0013**	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,7604	0,2503	0,0460	0,0238	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,8964	0,4312	0,1121	0,0643	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	...												

Imkime, pavyzdžiui, sėkmės tikimybę $p = 1/5 = 0{,}20$. Lentelėje randame:

$$p(X \leqslant 2) = 0{,}0013.$$

O skaičiuodami gauname:

$$p(X = 0) = 0{,}8^{50} \approx 0{,}000014;$$
$$p(X = 1) = 50 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^{49} \approx 0{,}000178;$$
$$p(X = 2) = \frac{50 \cdot 49}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^{48} \approx 0{,}001093.$$

Sudėję šias tris tikimybes randame:

$$p(X \leqslant 2) \approx p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = \\ = 0{,}001285 \approx 0{,}0013,$$

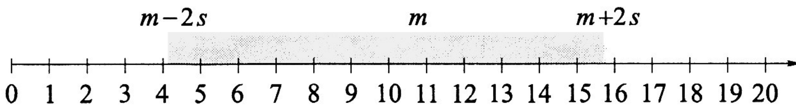
t. y. gautoji reikšmė apytiksliai lygi esančiai lentelėje.

Lentelėje taip pat galima rasti, kokia yra tikimybė gauti *normaliąją* baigtį, t. y. baigtį tarp $m - 2s$ ir $m + 2s$. Apskaičiuojame vidurkį m ir

standartinį nuokrypį s:

$$m = N \cdot p = 50 \cdot 0{,}2 = 10;$$
$$s = \sqrt{N \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{50 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = \sqrt{8} \approx 2{,}83.$$

Tad normaliosios baigtys bus sėkmių skaičiai nuo $m-2s = 10-2\cdot 2{,}83 = 4{,}34$ iki $m+2s = 10+2\cdot 2{,}83 = 15{,}66$.



Taigi normaliosios baigtys bus sėkmių skaičiai 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 ir 15.

$p(5 \leqslant X \leqslant 15)$. Tikimybę randame binominio skirstinio lentelėje:

$$p(5 \leqslant X \leqslant 15) = p(X \leqslant 15) - p(X \leqslant 4) =$$
$$= 0{,}9692 - 0{,}0185 = 0{,}9507 = 95{,}07\%.$$

Ši tikimybė yra labai arti 95%, t. y. tikimybės, kad normaliai pasiskirstęs dydis įgys normalias baigtis (plg. I dalies 8.5 skirsnį). Tai bendras binomiškai pasiskirsčiusių dydžių bruožas – tam tikru tikslumu jie turi *normaliai pasiskirsčiusių* dydžių savybes:

- apie 68% atvejų sėkmių skaičiaus ir vidurkio skirtumas neviršija vieno standartinio nuokrypio;
- apie 95% atvejų sėkmių skaičiaus reikšmės skiriasi nuo vidurkio ne daugiau kaip 2 standartiniais nuokrypiais; šios reikšmės ir yra normaliosios;
- apie 0,25% atvejų sėkmių skaičiaus reikšmės skiriasi nuo vidurkio daugiau kaip 3 standartiniais nuokrypiais; šios reikšmės yra išskirtinės.

9.3. Retųjų įvykių dėsnis

Žinant ir bandymų skaičių, ir sėkmės tikimybę, pagal formules

$$m = N \cdot p \quad \text{ir} \quad s = \sqrt{N \cdot p \cdot (1-p)}$$

galima apskaičiuoti vidurkį ir standartinį nuokrypį. Bet daugeliu atvejų būna kur kas mažiau žinomų reikšmių.

Prieš keletą metų laikraščiuose rašyta, kad vienoje Anglijos vietoje šalia daug ginčų sukėlusios atominių medžiagų įmonės Silafilde (anksčiau vad. *Windscale*) tam tikru laikotarpiu nustatytas sergančiųjų leukemija pagausėjimas. Pagal šalies vidurkį turėjo būti apie 14 atvejų, o iš tikrųjų stebėta 29. Ar tai galėjo būti tik atsitiktinumas?

Sergančiųjų leukemija skaičių galima suvokti kaip binomiškai pasiskirsčiusį dydį. Tikimybė susirgti leukemija gyvenančiam toje vietoje, t. y. tikimybė p, nėra žinoma. Kadangi nenurodytas ir gyventojų skaičius toje vietovėje, tai N reikšmės taip pat nežinome. Visa, ką mes žinome – leukemija labai reta ir, kaip regis, savo auką visai atsitiktinai pasirenkanti liga. Tokiais atvejais galima remtis *retųjų įvykių dėsniu*, tinkančiu retai įvykstantiems įvykiams.

Panagrinėkime retą įvykį. Jo pasirodymo tikimybė p čia bus mažas (praktiškai mažesnis už 10%) skaičius. Tuomet daugiklį $(1 - p)$ standartinio nuokrypio formulėje galima pakeisti 1:

$$s = \sqrt{N \cdot p \cdot (1 - p)} \approx \sqrt{N \cdot p}.$$

Bet $N \cdot p$ yra ne kas kita kaip vidurkis m, taigi šiuo atveju

$$s \approx \sqrt{m}.$$

Retųjų įvykių dėsnis

Jei baigtis reta (daugių daugiausia pasitaikanti 10% atvejų), tai baigčių skaičiaus standartinį nuokrypį galima skaičiuoti kaip kvadratinę šaknį iš vidurkio:

$$\textit{standartinis nuokrypis} \approx \sqrt{\textit{vidurkis}}.$$

O Silafildo atveju susirgusiųjų leukemija skaičiaus vidurkį mes kaip tik ir žinome – jis lygus 14. Todėl pagal retų įvykių dėsnį galima tikėtis, kad standartinis nuokrypis bus

$$s \approx \sqrt{14} \approx 3{,}74.$$

Tuomet nuokrypis nuo šalies vidurkio yra normalus, jei jis neviršija $2 \cdot s \approx 7{,}5$. O mūsų atveju leukemijos perviršis yra $29 - 14 = 15$, tai atitinka maždaug 4 standartinius nuokrypius. Tad susirgusiųjų leukemija skaičius apie Silafildą yra išskirtinai didelis.

907 908 909

Daugeliu atvejų taikant retųjų įvykių dėsnį vidurkis nėra žinomas. Tuomet išsisukti iš tokios situacijos galima remiantis tuo, kad *stebimasis* įvykių skaičius paprastai esti artimas vidurkiui, ir standartinį nuokrypį galima visai neblogai įvertinti prilyginus vidurkį stebimajam įvykių skaičiui:

Jei baigtis reta, tai neblogas standartinio nuokrypio įvertis bus kvadratinė šaknis iš stebimojo įvykių skaičiaus:

$$\textit{standartinis nuokrypis} \approx \sqrt{\textit{įvykių skaičius}}.$$

Geras reto įvykio pavyzdys yra ilgo pusamžio radioaktyviojo branduolio skilimas. Jei Geigerio skaitikliu tam tikrą laiką – trumpą lyginant su pusamžiu – matuosime radioaktyviųjų skilimų skaičių, tai suspės suskilti tik labai maža dalis branduolių.

Todėl tikimybė branduoliui per tokį laikotarpį suskilti yra tokia maža, kad galima taikyti retų įvykių dėsnį. Taigi standartinis nuokrypis, nustatantis taip pat ir normalias suskilusių branduolių skaičiaus ribas, bus kvadratinė šaknis iš įvykių skaičiaus.

910 911

9.4. Kiti binominio skirstinio taikymai

Pakartotinis sugavimas

Statistika taip pat naudojama, kai iš *atsitiktinių imčių* vertinamas populiacijos dydis. Tai galima padaryti, pavyzdžiui, *pakartotinio sugavimo* metodu. Sakykime, norime įvertinti tam tikros rūšies žuvų skaičių ežere. Sugauname, pavyzdžiui, 200 tos rūšies žuvų, jas pažymime ir vėl paleidžiame. Po kurio laiko (kai žuvys jau bus spėjusios kaip reikiant išsimaišyti) vėl pagauname, pavyzdžiui, 100 žuvų. Jei paaiškėja, kad 10 iš tų naujai pagautųjų žuvų yra žymėtos, galime tarti, kad dešimt iš šimto žuvų yra žymėtosios, t. y. kad žymėtosios žuvys sudaro dešimtadalį visų žuvų. O kadangi iš viso žymėtųjų žuvų yra 200, tai bendras žuvų skaičius 10 kartų didesnis, – taigi iš viso ežere bus apie 2000 žuvų.

Bet kiek patikimas yra toks įvertinimas? Mes juk žinome, kad sugaunamų žymėtųjų žuvų skaičius yra atsitiktinis dydis. Kadangi žymėtųjų

žuvų skaičius sudaro vos apie dešimtadalį viso žuvų skaičiaus, tai galime įvertinti standartinio nuokrypio dydį, remdamiesi retų įvykių dėsniu:

$$\textit{standartinis nuokrypis} \approx \sqrt{10} \approx 3{,}2.$$

Tad dvigubas standartinis nuokrypis yra apytiksliai lygus 6, todėl bet koks žymėtųjų žuvų skaičius tarp 4 ir 16 žuvų bus normaliųjų reikšmių srityje. Taigi mūsų bendro žuvų kiekio vertinimas gana nepatikimas. Pagavę 4 žuvis, būtume padarę išvadą, kad žymėtosios žuvys tesudaro vieną dvidešimtpenktąją dalį, ir kad tuomet bendras žuvų kiekis – 5000 – daugiau nei dvigubai didesnis už pirmąjį įvertį. O pagavę 16 žuvų, būtume tarę, kad žymėtosios žuvys sudaro apie šeštadalį visų žuvų ir todėl bendras žuvų skaičius – apie 1200, arba daugiau nei pusė pirmojo įverčio.

Žymėtųjų žuvų skaičius iš 100 žuvų imties	Dalies, kurią žymėtosios žuvys sudaro nuo viso žuvų skaičiaus, įvertis	Bendro žuvų skaičiaus, kai 200 iš jų yra žymėtos, įvertis
4	$4/100 = 1/25$	$25 \cdot 200 = 5000$
10	$10/100 = 1/10$	$10 \cdot 200 = 2000$
16	$16/100 \approx 1/6$	$6 \cdot 200 = 1200$

Todėl paprasčiausias pakartotinio pagavimo metodo variantas tinka tik populiacijos dydžio eilei įvertinti. Tokiu būdu įvertis 2000 reiškia, kad tikrasis žuvų skaičius ežere yra tarp 1200 ir 5000.

912

Viešosios nuomonės tyrimai

Panašios problemos kyla ir atliekant viešosios nuomonės tyrimus. Čia siekiama įvertinti, kiek rinkėjų balsuotų už tam tikrą partiją. Pavyzdžiu paimkime Lietuvos socialdemokratų partiją, kuri per praėjusius rinkimus (žr. lentelę kitame puslapyje) surinko 6,6% balsų.

Pažvelkime į „Vilmorus" atliktos apklausos rezultatus. Buvo apklausta apie 1000 atsitiktinių rinkėjų, darant prielaidą, kad jie atsakinėja nepriklausomai vieni nuo kitų ir atstovauja visus rinkėjus. Apie 90 žmonių atsakė, kad balsuotų už Lietuvos socialdemokratų partiją, o tai sudaro 9% apklaustųjų rinkėjų skaičiaus. Daroma išvada, kad 9% visų rinkėjų taip pat balsuotų už socialdemokratus. Tačiau ar tikrai galima tvirtinti, kad

socialdemokratų partijos pozicijos sustiprėjo? Juk už socialdemokratus ketinančių balsuoti apklaustųjų rinkėjų skaičius yra atsitiktinis.

1995 metų rinkimų į Lietuvos Seimą daugiamandatėse apygardose rezultatai ir visuomenės nuomonės tyrimų duomenys (skelbti dienraštyje)

Partija arba rinkimų koalicija	Rinkimų rezultatas	99.04.07–11 apklausa	99.05.14–18 apklausa	99.05.14–18 patikimumo intervalas (%)
Tėvynės sąjunga	29,8	9,3	9,2	7–11
Lietuvos krikščionių demokratų partija	9,91	5,9	6,5	5–8
Lietuvos demokratinė darbo partija	9,52	9,1	9,4	7–11
Lietuvos centro sąjunga	8,24	14,5	16,6	14–19
Lietuvos socialdemokratų partija	6,60	7,6	9,0	7–11
Lietuvių nacionalinė partija (Jaunoji Lietuva)	3,81	2,2	2,8	2–4
Lietuvos moterų partija	3,67	2,4	3,0	2–4
Krikščionių demokratų sąjunga	3,08	2,0	1,4	0,7–2
Lietuvos lenkų rinkimų akcija	2,98	1,3	1,7	0,9–2,5
Lietuvių tautininkų ir Lietuvos demokratų partijos koalicija	2,09	1	1,4	0,7–2
Lietuvos liberalų sąjunga	1,84	1,3	0,7	0–2
Lietuvos valstiečių partija	1,66	1,3	1,2	0,5–2
Lietuvos politinių kalinių ir tremtinių sąjunga	1,50	0,8	0,7	0–2
Kitos partijos ir sąjungos	10,37	0,8	0,7	0–2

Prognozės patikimumą vertinsime šitaip. Sakysime, kad permaina yra patikima, jeigu jos nukrypimas nuo ankstesnės prognozės yra didesnis nei 2 standartiniai nuokrypiai. Remdamiesi „Vilmorus“ duomenimis, tarsime, kad tikimybė, jog rinkėjas balsuos už socialdemokratus, lygi 0,09. Kadangi buvo apklausta $N = 1000$ rinkėjų ir $p = 0{,}09$, tai standartinis

nuokrypis bus toks:

$$s = \sqrt{N \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{1000 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}91} \approx 9{,}05.$$

Todėl socialdemokratų partijos šalininkų tarp tų 1000 apklaustųjų skaičius gali svyruoti nuo $90 - 18 = 72$ iki $90 + 18 = 108$, o tai atitinka svyravimą procentais

$$\text{nuo } \frac{72}{1000} = 7{,}2\% \quad \text{iki } \frac{108}{1000} = 10{,}8\%.$$

Pagal mūsų prognozę už socialdemokratų partiją balsuotų apie 9% rinkėjų, ir šio procentinio skaičiaus nepatikimumas, kaip matome, bus toks:

$$\pm\frac{18}{1000} = \pm 1{,}8\%.$$

Kadangi per praėjusius rinkimus socialdemokratų partija surinko 6,6% balsų, tai darome išvadą, kad partija savo pozicijas šiek tiek sustiprino.

Apklausę 1000 rinkėjų, nepatikimumą gausime įvairų – priklauso nuo tikimybės p dydžio. Atlikus tokiu pat būdu kaip ir pavyzdyje skaičiavimus, galima gauti tokią lentelę:

Nepatikimumas apklausus 1000 rinkėjų

Pagal viešosios nuomonės tyrimą rinkėjų, balsuosiančių „už“	Nepatikimumas procentais
2%	±0,9%
4%	±1,2%
10%	±1,9%
20%	±2,5%
50%	±3,2%
80%	±2,5%
90%	±1,9%
96%	±1,2%
98%	±0,9%

Lentelė, be kita ko, rodo, kad reikia būti itin atsargiam darant išvadas apie mažąsias partijas, esančias ties patekimo į Seimą riba. Reikia pabrėžti, kad nepatikimumas labai priklauso nuo apklaustųjų skaičiaus – juo daugiau apklausiame, tuo mažesnis nepatikimumas.

10. Pasaulio vaizdas

10.1. Įvadas



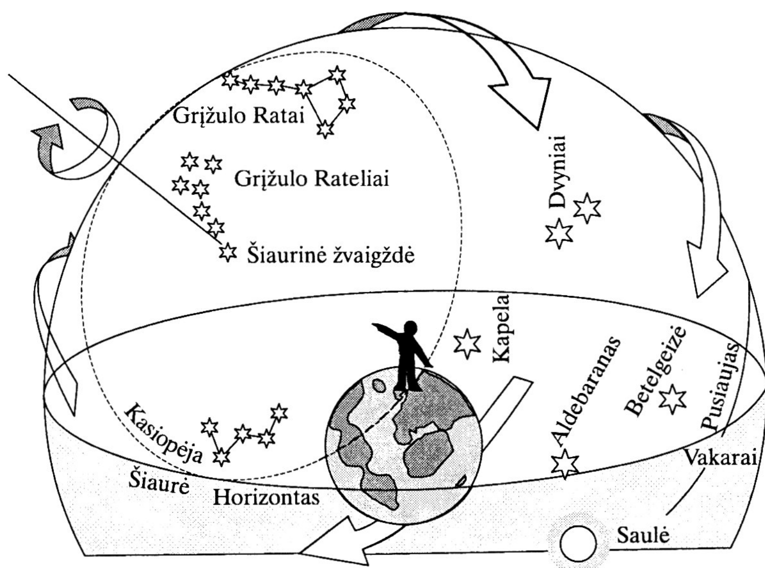
Piramidės yra orientuotos pagal keturias pasaulio šalis, kurias galima nustatyti, pavyzdžiui, pagal Šiaurinę žvaigždę.



Kai rytą prieš pat saulėtekį pasirodo Sirijus, netrukus patvinsta Nilas.

Žmogų visada žavėjo žvaigždės. Galbūt dėl to, kad jos gražios ir nekintančios, iš dalies gal dėl to, kad pagal jas galima orientuotis laike ir erdvėje. Pavyzdžiui, stebint, kada pasirodo tam tikros būdingos žvaigždės, galima susigaudyti metų laikų kaitoje ir taip tinkamu laiku pradėti sėją ar pjūtį. Štai, pavyzdžiui, Smolende, Švedijoje, lig šių dienų išliko tradicija nepradėti rudeninio arimo, kol rugpjūčio pabaigoje rytiniame danguje nepasirodys Sirijus. Lietuviai Šienpjovių (Oriono), o vėliau ir Sirijaus rytinį pasirodymą senovėje siedavo su vėlyvąja šienapjūte, vykdavusia po rugiapjūtės. Todėl ir Sirijus buvo vadinamas Valgio nešėja (anksti rytą dar su tamsa išėjusiems šieno pjauti vyrams).

Visais laikais žmogus atidžiai stebėjo Saulės, Mėnulio ir planetų judėjimą žvaigždėtame danguje. Žvelgiant į dangų, susidaro įspūdis, kad visos žvaigždės yra vienodai nutolusios nuo mūsų ir išsidėsčiusios dangaus skliaute, kuris dieną atrodo lyg žydras kažkokio mus supančio rutulio vidinis paviršius. O Žemė tarytum yra šio įsivaizduojamo rutulio centre. Dabar mes žinome, kad švyti Žemės atmosfera ir ne tiek savo šviesa,

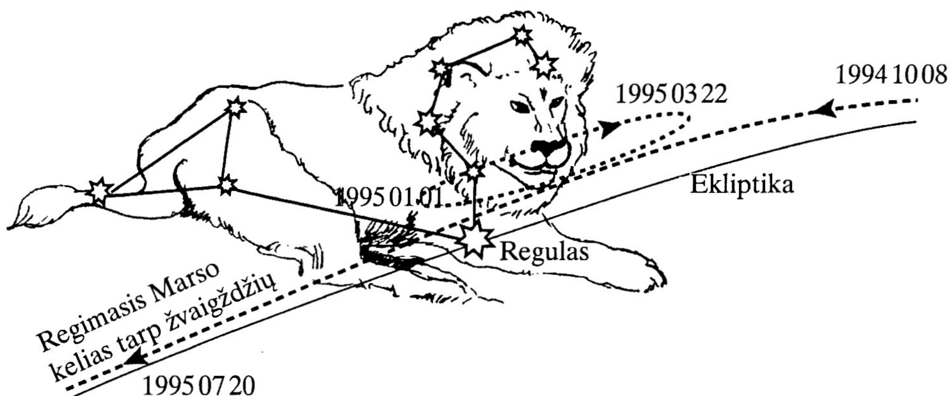


Žiūrint iš Žemės atrodo, kad žvaigždės pateka rytuose ir leidžiasi vakaruose. Piešinėlyje Saulė dingusi už horizonto; yra naktis. Aldebaranas Tauro žvaigždyne leidžiasi vakaruose. Betelgeizė Orione (Šienpjoviuose) netrukus irgi paseks jo keliu. Niekad nenusileidžia tik žvaigždės, esančios punktyru pažymėto apskritimo viduje. Tai pasakytina, pavyzdžiui, apie Grįžulo Ratus, kurie šią naktį yra aukštai danguje.

kiek išsklaidydama Saulės spindulius, labiausiai violetinius, mėlynuosius ir žaliuosius (todėl ir susidaro žydra spalva). Žvaigždės yra labai nevienodame nuotolyje nuo Žemės ir visos nepaprastai toli, nepalyginamai toliau už pačius aukščiausius Žemės atmosferos sluoksnius.

Žemė visą laiką sukasi apie savo ašį iš vakarų į rytus ir apsisuka vieną kartą per parą. Mes šito nejaučiame ir įsivaizduojame, kad visas dangaus skliautas su visais šviesuliais apsisuka aplink Žemę per parą iš rytų į vakarus, o dangaus sukimosi ašis sutampa su Žemės ašimi ir taiko į vadinamuosius *dangaus polius.* Šiaurinis dangaus polius yra visiškai netoli Šiaurinės žvaigždės, priklausančios Grįžulo Ratelių žvaigždynui. Žemė ne tik sukasi apie savo ašį, bet per metus dar ir apskrieja aplink Saulę. Taigi kiekvieną dieną į Saulę mes žiūrime vis iš kitos vietos erdvėje. Dėl to mums atrodo, kad Saulė dangaus skliautu iš lėto slenka iš vakarų į rytus, keisdama savo regimąją padėtį tarp žvaigždžių ir per metus dangaus skliaute nubrėždama visą apskritimą, vadinamą *ekliptika.*

Žemė yra viena iš planetų. Kitos planetos irgi skrieja apie Saulę ta pačia kryptimi. Kuo toliau planeta nuo Saulės, t. y. kuo didesne orbita ji skrieja, tuo mažesnis jos skriejimo greitis. Merkurijus ir Venera yra



Kilpinis Marso judėjimas 1994 spalį–1995 liepą.

arčiausiai Saulės ir dėl to skrieja greičiausiai. Visos kitos planetos skrieja lėčiau negu Žemė. Taigi planetos viena kitą prisiveja ir pralenkia.

Kai žiūrime iš skriejančios Žemės į skriejančią kitą planetą, didžiąją laiko dalį matome ją dangaus skliaute tarp žvaigždžių netoli ekliptikos slenkančią iš vakarų į rytus. Tačiau būna laikotarpių, kai planetos trumpam pasuka tarp žvaigždžių į vakarus ir tokiu būdu nubrėžia kilpą. Taip atsitinka tuomet, kai arba Žemė baigia prisivyti planetą ir galiausiai ją pralenkia, arba planeta pasiveja ir pralenkia Žemę.

Arčiausiai esantis dangaus kūnas Žemės palydovas Mėnulis skrieja apie Žemę iš vakarų į rytus ir dėl to jo regimasis kelias tarp žvaigždžių, panašiai kaip ir Saulės, yra daug lygesnis, be kilpų. Atsidūręs priešais planetas ar žvaigždes, Mėnulis jas užtemdo (okultacija), kaip užtemdo ir Saulę. Patekęs į Žemės šešėlį, jis pats užtemsta.

Nors ir sudėtingas Saulės, Mėnulio ir planetų regimasis judėjimas tarp žvaigždžių, žmonės per tūkstančius metų užčiuopė dėsningumus, pastebėjo, kad dangaus reiškiniai kartojasi, nors ir pagal painią sistemą. Kai kas net išmoko iš anksto numatyti Saulės ir Mėnulio užtemimus. Tokiu būdu senovėje vis labiau įsigalėjo požiūris į dangų kaip į amžinų ir nekintamų dėsnių valdomą sritį.

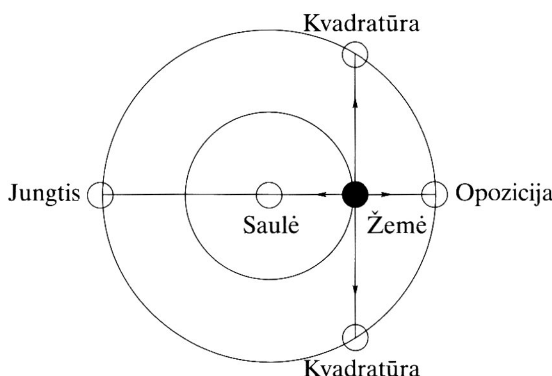
Žmogus domėjosi ne tik Mėnulio fazėmis, t. y. jo padėtimis Saulės atžvilgiu, bet ir planetų padėtimis Saulės atžvilgiu – vadinamosiomis *konfigūracijomis*, pavyzdžiui:

jungtis – planeta matoma Saulės kryptimi;

kvadratūra – planeta matoma statmena Saulei kryptimi;

opozicija – planeta matoma priešinga Saulei kryptimi.

Ypač įspūdingas reginys būna planetai esant opozicijoje arba netoli jos. Planeta tuomet pateka Saulei nusileidus, ir dėl to matoma visą naktį. Tuomet ir jos spindesys esti pats didžiausias, nes ji yra atsidūrusi arčiausiai Žemės, o į mus atgręžtoji jos pusė visa apšviesta ir lyg veidrodis atspindi Saulės šviesą.

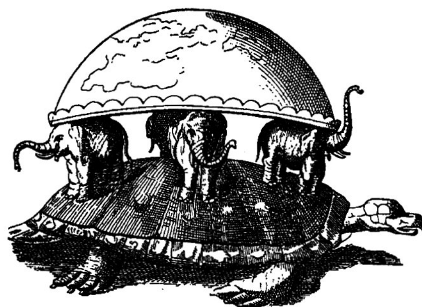


1001 1002 1003 1004

10.2. Klasikinis pasaulio vaizdas



Pasaulio sąranga pagal egiptiečius (apie 1000 m. pr. Kr.).



Indai įsivaizdavo, kad taip laikosi Žemė (apie 500 m. pr. Kr.).

Remdamasis žvaigždėtojo dangaus stebėjimais, žmogus susikūrė įvairiausių vaizdinių apie mūsų vietą Visatoje – vadinamąjį astronominį pasaulio vaizdą. Ilgainiui šis vaizdas ne kartą keitėsi ir dažnai tapdavo karščiausių kultūros istorijoje debatų objektu.

1005

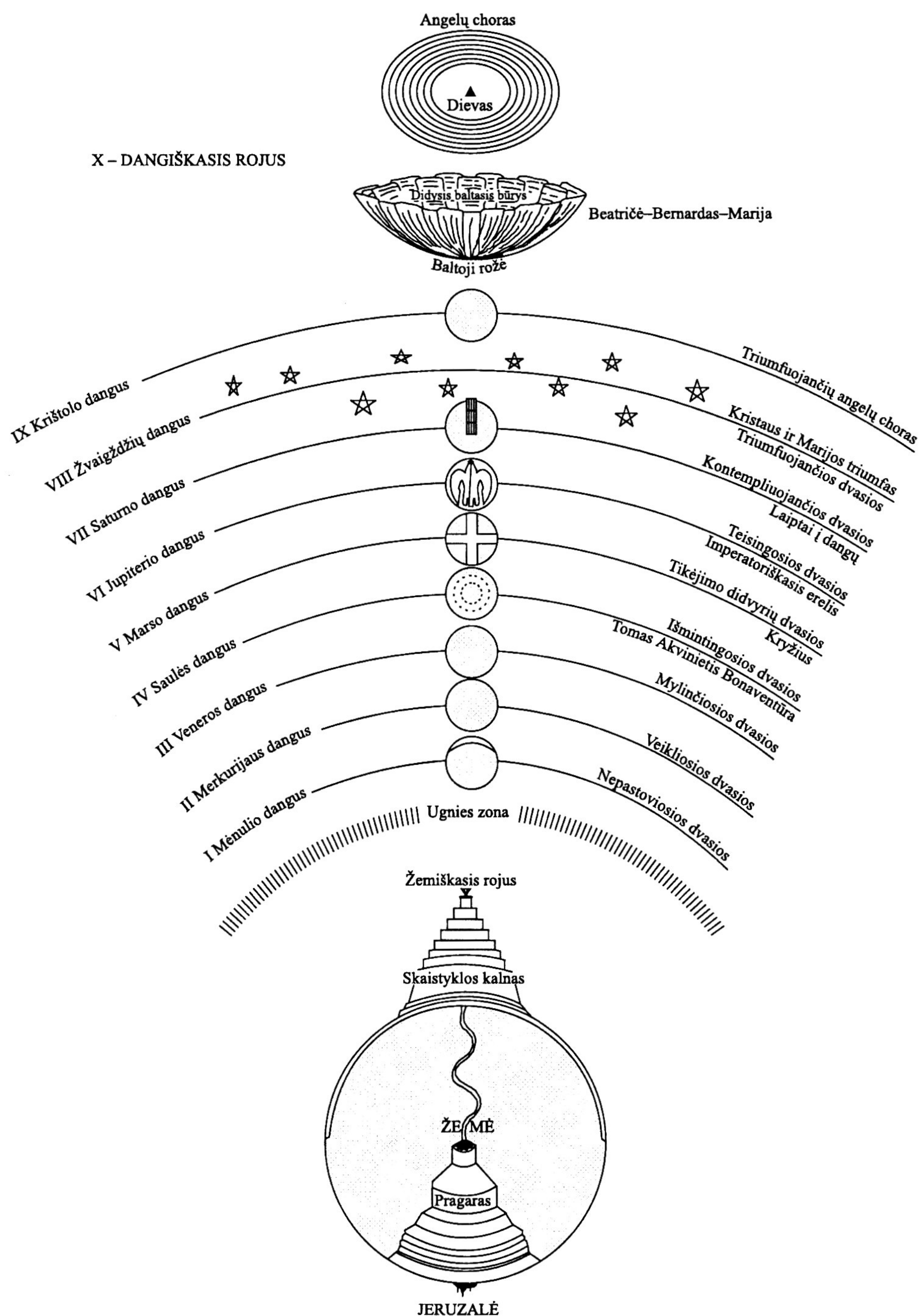
Klasikinį pasaulio vaizdą, kuris nuo antikos laikų išsilaikė iki viduramžių, sukūrė graikų mokslininkai ir filosofai. 700 metų helenistinės kultūros centras buvo Aleksandrijos miestas Egipte. Šiame Aleksandro Didžiojo įkurtame mieste buvo didžiausia tais laikais laiko mokslinė biblioteka, traukusi geriausius mokslininkus. Čia, remiami Aleksandrijos valdovų, jie galėjo netrukdomi susitelkti savo tyrinėjimams. Bibliotekos klestėjimo laikotarpiu joje buvo daugiau nei 700 000 knygų iš įvairiausių sričių.

Būtent čia apie 300 m. pr. Kr. matematikas Euklidas susistemino visas matematikos žinias į 13 knygų – vadinamuosius „Elementus“. Geografas Eratostenas, apie 225 m. pr. Kr. vadovavęs bibliotekai, sudarė pirmąjį mokslinį visos Žemės žemėlapį ir sudėjo į 3 knygas to laiko geografijos žinias. Jau pasakojome I dalies 26–28 puslapiuose, kaip jis nustatė Žemės dydį. Eratostenas susirašinėjo su didžiausiu antikos matematiku ir fiziku Archimedu, kuris išsimokslinimą buvo gavęs Aleksandrijoje. Astronomas Hiparkas, davęs pradžią trigonometrijai ir sudaręs pirmąjį didelį žvaigždžių atlasą, dirbo bibliotekoje apie 150 m. pr. Kr. Jis taip pat įvedė astronominius matavimus, kaip išeities tašką geografinei padėčiai nustatyti. Jis, be kita ko, sudarė 600 metų Mėnulio užtemimų katalogą.

Po Kleopatros mirties 30 m. pr. Kr. Aleksandriją užėmė romėnai. Mokslas ėmė merdėti, tačiau dar kelis šimtmečius Aleksandrija tvarkė mokslinį palikimą. Paskutinis didysis Aleksandrijos astronomas Ptolemajas, dirbęs apie 150 m. po Kr., sukaupė visas astronomijos žinias 13 knygų – „Almagestą“; tai svarbiausias mūsų žinių šaltinis apie klasikinį pasaulio vaizdą. Paskutinė reikšminga Aleksandrijos asmenybė matematikoje ir



Ptolemajo sudarytas tuo metu ištirto pasaulio žemėlapis.



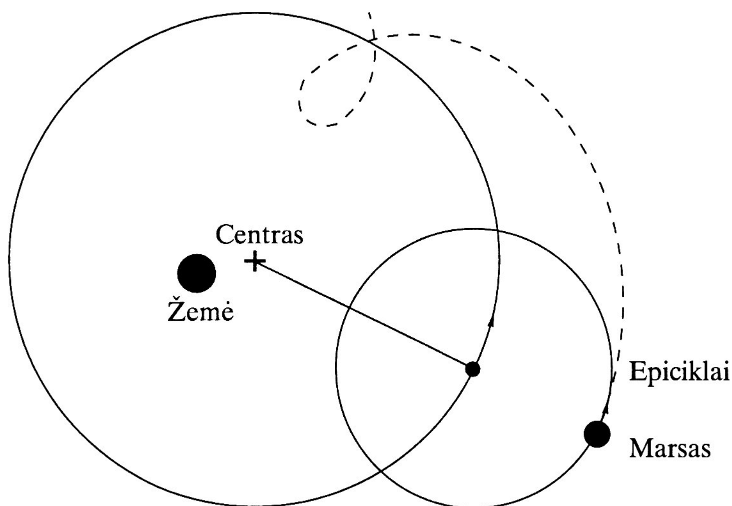
Viduramžių pasaulio vaizdas, atskleistas A. Dantės „Dieviškojoje komedijoje“ (1307–1320). *Netobuloji Žemė su pragaru viduje yra centre, o dangiškasis rojus – toliausiai nuo Žemės, už paskutinės – krištolo – sferos, duodančios pradžią visam judėjimui.*

sykiu vienintelė matematikė moteris Hipatija sulaukė žiauraus likimo – 418 m. po Kr. ji buvo pasmerkta kaip pagonė ir įtūžusios minios gyva suplėšyta į gabalus.

Klasikinis pasaulėvaizdis pagrįstas įsitikinimu, kad žemiškoji ir dangiškoji sferos yra du griežtai skirtingi pasauliai, kiekvienas su savo dėsniais. Žemiškoje srityje visa kas laikina – nes bet koks pradėtas judėjimas vėl savaime išblėsta. Danguje visa kas nekintama – todėl judėjimas ten trunka iki begalybės. Siekiant paaiškinti žvaigždžių ir planetų judėjimą, išeities tašku imtas tolygusis judėjimas apskritimu, nes tik toks judėjimas pasižymi reikiama simetrija bei tobulumu.

Ptolemajo pasaulėvaizdyje Mėnulis, Saulė ir planetos yra pritvirtinti kiekviena prie savo rutulio kiauto (*sferos*), kurios sukasi apie nejudančią Žemę. Už šių sferų galiausiai yra *žvaigždžių dangus.* Manyta šias sferas buvus iš nežemiškos į stiklą panašios medžiagos – skaidrios šviesai, bet nepralaidžios dangaus kūnams.

Žvaigždžių judėjimą galima paaiškinti tarus, kad žvaigždžių dangus per žvaigždžių parą apsisuka vieną kartą. Bet norint paaiškinti planetų kilpinius judesius bei įvairią metų laikų trukmę, Ptolemajui teko griebtis sudėtingesnio dangaus kūnų judėjimo aprašymo. Judėjimo apskritimu centrui nesutampant su Žemės centru, atsiranda *ekscentrinė* orbita, be kita ko, paaiškinanti netolygų Saulės judėjimą. Toliau, kilpiniams judesiams paaiškinti Ptolemajas įvedė *epiciklus*: Saulė, Mėnulis ir planetos juda



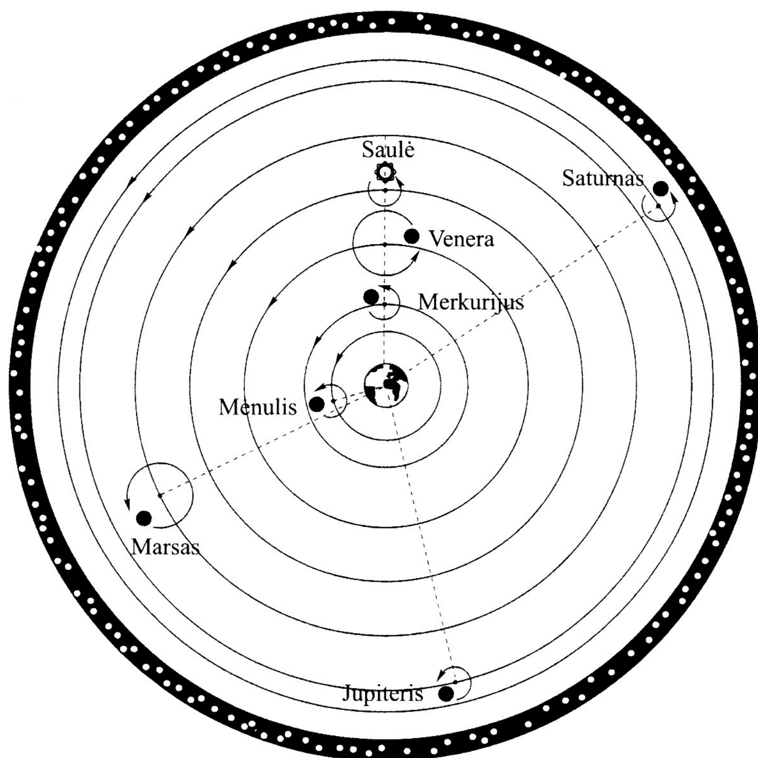
Tarę̨s, kad Saulė, Mėnulis ir planetos juda apskritimais, kurie savo ruožtu juda apie Žemę, Ptolemajas sugebėjo paaiškinti svarbiausius dangaus kūnų judėjimo bruožus. Pavyzdžiui, kilpinis judėjimas stebimas praskriejant planetai pro Žemę taip, kaip parodyta piešinėlyje.

mažais apskritimais – epiciklais, kurių centrai savo ruožtu apskritimais juda apie Žemę. Taip painia tolygiųjų judėjimų apskritimu sistema Ptolemajas sugebėjo perteikti svarbiausius Saulės, Mėnulio ir planetų judėjimo bruožus.

1006 1007

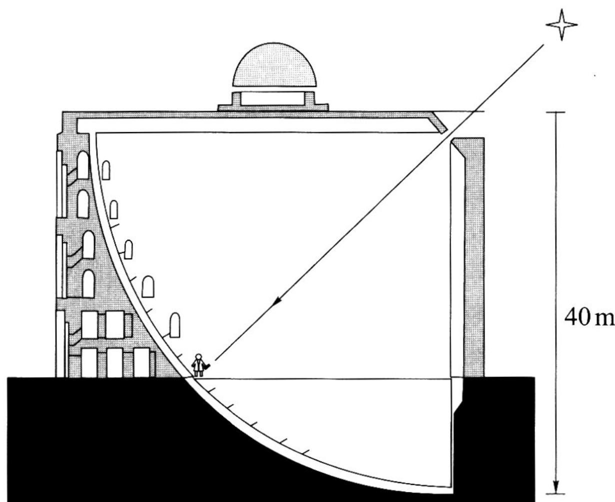
Graikų kultūrai krikščioniškojoje Europoje žlugus, nuėjo užmarštin ir Ptolemajo pasaulio vaizdas. Visam tūkstantmečiui krikščioniškoji Europa nustojo mokslinės atminties. Užtat graikiškąjį mokslo paveldą perėmė ir toliau plėtojo islamo pasaulis.

Islamiškoji astronomija savo viršūnę pasiekė apie 1400 m., kai astronomas Ulugbekas ant Čingischano ir Tamerlano karalysčių griuvėsių Samarkande įkūrė islamo mokslo centrą. Be teologijos, čia buvo galima studijuoti ir gamtos mokslus. Prie islamiškojo universiteto Ulugbekas įsteigė observatoriją, ir pirmąkart po Hiparko vėl buvo sistemiškai iš-



Geocentrinis pasaulio vaizdas. Ptolemajo pasaulėvaizdyje visi dangaus kūnai juda apie Visatos centre esančią nejudančią Žemę. Atkreipkite dėmesį, kad Merkurijaus, Veneros ir Saulės epiciklai juda išvien – tai užtikrina tą faktą, kad Merkurijus ir Venera visada matyti netoli Saulės.

matuota šimtai žvaigždžių padėčių – šiuokart kur kas didesniu tikslumu. Ulugbeko žvaigždžių atlasas išėjo arabų, persų ir turkų kalbomis. Į lotynų kalbą jis buvo išverstas tik po 200 metų, tad padaryti tiesioginės įtakos Europos astronomijos raidai jis nesuspėjo.



Ulugbekas ne vieną savo mokyklą ar universitetą įkūrė su tokiu moto: „Kiekvienas tikras musulmonas – ir moteris, ir vyras – privalo siekti žinių". Paveikslėlyje pavaizduota jo astronomijos observatorija Samarkande su didžiausiu kada nors įrengtu kvadrantu. Po jo mirties observatorija „sunyko", tačiau kvadranto likučiai tebėra ir šiandien.

1008

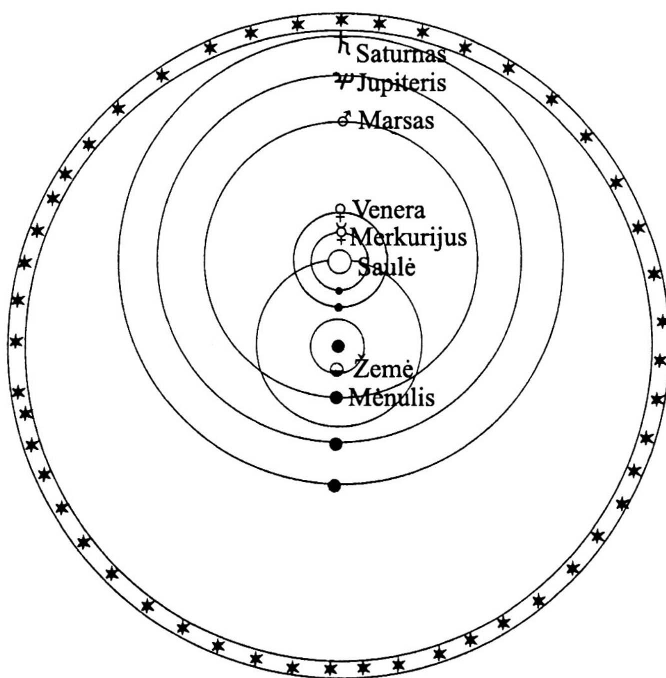
10.3. Plika akimi

Ptolemajo pasaulio vaizdas iš esmės nepakitęs išsilaikė daugiau nei 1000 metų, iki XVI a. vidurio, kai M. Kopernikas pirmasis išdrįso pareikšti, kad Saulės sistemą sėkmingai būtų galima aprašyti centre patalpinus Saulę, o apie ją leidus skrieti Žemei ir kitoms planetoms. Nepaisant modelio akivaizdumo, Kopernikas vis dėlto negalėjo pateikti kokių nors stebėjimų, kurie tiesiogiai prieštarautų Ptolemajo pasaulėvaizdžiui. O įsigilinus į detales, jo modelis buvo toks pat painus kaip ir Ptolemajo. Beje, buvo ir akivaizdus religinis kliuvinys – kad Žemė ne tik buvo iškelta iš Visatos centro, bet dar ir įgavo judėjimą – tiek apie savo ašį, tiek apie Saulę. Žinoma, šio judėjimo tiesiogiai nepatiriame. Teiginys apie Žemės judėjimą davė dingstį tokiems kebliems klausimams, kaip antai: jei Žemė sukasi

apie savo ašį, tai ar neturėtų daiktas, išsviestas vertikaliai aukštyn – Žemei tuo laiku pasisukus – nukristi įkypai? Jei Žemė skrieja apie Saulę, tai ar neturėtų kryptis į žvaigždes per metus pasikeisti? Kodėl nestebime šių ir kitų panašių Žemės sukimosi padarinių?

Iš dalies dėl tiesioginių stebėjimų, kurie paremtų modelį, stokos, iš dalies dėl to, kad jis griovė Žemės, kaip išskirtinės ir nejudamos planetos, įvaizdį, Koperniko pasaulio vaizdas iš pradžių sunkiai skynėsi kelią. Kad būtų buvę galima išsižadėti klasikinio pasaulio vaizdo, reikėjo sulaukti naujo astronomijos raidos etapo. Tikslius ir sistemingus astronominius stebėjimus Europoje atnaujino danas T. Brahė (*Tycho Brahe*).

T. Brahės domėjimąsi astronomija paskatino įvairūs įvykiai. Pirmiausia, dar būdamas trylikametis, jis išvydo Saulės užtemimą, ir tai jam padarė tokį didelį įspūdį, kad jis įsigijo Ptolemajo „Almagestą" (lotynišką vertimą) ir ėmė gilintis į klasikinę astronomiją. Po dvylikos metų jis apstulbęs staiga išvydo danguje naują žvaigždę – vadinamąją supernovą. Kelis mėnesius ji švytėjo toje pačioje dangaus vietoje, ir todėl turėjo būti susieta su žvaigždžių sfera. Tai buvo akivaizdi priežastis atsižadėti dangiškų sferų nekintamumo.



T. Brahės mišrusis pasaulio vaizdas. Anot jo, Mėnulis ir Saulė juda apie nejudančią Žemę, o planetos juda apie Saulę. Toks modelis išlaikė nemažai Koperniko pasaulio vaizdo privalumų, ir drauge nesikirto su Žemės kaip Visatos centro vaidmeniu.



T. Brahės pasaulio vaizdas buvo gerai vertinamas iki pat XVII a. Piešinys rodo, kaip sveriamas Koperniko pasaulio vaizdas, ir matyti, kad jis lengvesnis. Atkreipkite dėmesį į angelus kairiajame viršutiniame kampe, stumiančius Saulę ir planetas jų orbitomis. Taip pat atkreipkite dėmesį į Dievo ranką viršuje, viską rikiuojančią pagal matą ir svorį.
(Iš italų astronomijos knygos, 1651 m.)

14. 936

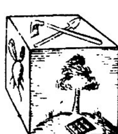
T. Brahė viešai paskelbė savo kruopščius naujosios žvaigždės *Stella Nova* stebėjimus ir tučtuojau išgarsėjo visoje Europoje. Tai buvo pagrindas karaliui Frederikui II pasiūlyti T. Brahei observatoriją Veno saloje. T. Brahės observatorija tapo Europos astronomijos centru, dosniai finansuojamu karaliaus – jai skiriamos lėšos ne vienerius metus viršydavo 1% valstybės finansų. Per 16 metų T. Brahė atliko ligtol tiksliausius ne tik žvaigždžių padėčių, bet ir planetų judėjimo žvaigždėtame danguje matavimus. Koperniko sistema jam buvo ne prie širdies, ir jis įvedė mišrų modelį.

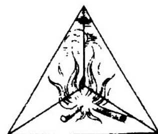
Modelis puikiai atspindėjo matomus iš Žemės santykius Saulės sistemoje, ir dar ilgą laiką po teleskopo išplitimo daugelis žymiųjų astronomų pripažino šį modelį.

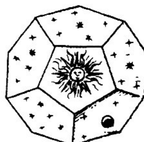
1009 1010

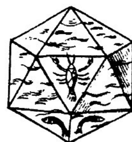
10.4. Sistema atsistoja į savo vietą

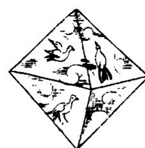
T. Brahė buvo didžiausias savo laikmečio stebėtojas, o J. Kepleris (*Johann Kepler*, 1571–1630) – vienas didžiųjų to laiko matematikų, užsidegęs idėja atskleisti dangaus paslaptis. Pitagoriečių pavyzdžiu jis buvo įsitikinęs, kad Visata yra suręsta pagal matematinės harmonijos dėsnius.


1. *Kubas*


2. *Tetraedras*


3. *Dodekaedras*

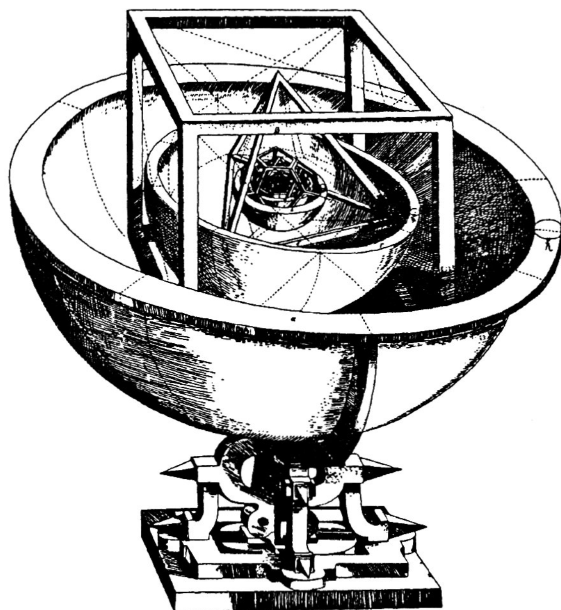

4. *Ikosaedras*


5. *Oktaedras*

Penki taisyklingieji briaunainiai (pagal Keplerio „Pasaulio harmonijas").

1011

Pirmas didelis jo išradimas buvo Saulės sistemos modelis: penki vienas į kitą įbrėžti taisyklingieji briaunainiai, o į juos ir apie juos įbrėžtų bei apibrėžtų pusrutulių pritvirtintos šešios planetos.



Keplerio briaunainis, Saulės sistemos modelis, paskelbtas 1596 m. „Visatos mįslėse": „Ketinu parodyti, kad Dievas, tverdamas Visatą ir nustatydamas pasaulio tvarką, turėjo galvoje penkis taisyklingus geometrinius kūnus, žinomus dar nuo Pitagoro ir Platono laikų, ir kad dangiškųjų sferų skaičių, proporcijas bei sąryšį tarp jų judėjimo nustatė pasinaudodamas tų kūnų matais".

Kepleris visą gyvenimą buvo įsitikinęs, kad jo modelis paaiškino, kodėl yra būtent 6 planetos (Merkurijus, Venera, Žemė, Marsas, Jupiteris ir Saturnas) – tai esą atitiko, jog egzistuoja būtent 5 taisyklingi briaunainiai skirti jų orbitoms. Nors tų taisyklingųjų briaunainių išmatavimai ir ne itin derėjo su planetų tarpusavio atstumais, modelis susilaukė dėmesio, ir Kepleris gavo vietą pas T. Brahę. Atkreipkite dėmesį, kad Keplerio briaunainyje Saulė yra Saulės sistemos centre. Nors ir ilgai bendradarbiavęs su T. Brahe, Kepleris taip ir liko Koperniko heliocentrinio pasaulio vaizdo šalininku.

Kai 1601 m. T. Brahė mirė, J. Kepleris, įsitikinęs, kad Viešpats Dievas T. Brahę išrinko atlikti stebėjimus, o jį patį – jiems interpretuoti, be jokių skrupulų pasisavino įspūdingą tikslių T. Brahės stebėjimų rinkinį. Po to, pasinaudodamas tais stebėjimais, Kepleris nustatė Marso orbitą (žr. „Keplerio metodas", 226 p.).

Iš principo jis ketino sukonstruoti tokius orbitų apskritimus, kurie tiksliai aprašytų turimas padėtis; bet po ne vienerius metus trukusių bandymų konstatavo, kad iš to nieko neišeina. Kad ir kokius jis ėmė apskritimus, tarp teorinės padėties ir stebėtosios visuomet būdavo mažiausiai 8 lanko minučių (t. y. $(8/60)^\circ$) skirtumas. Nors tai buvo labai mažas skirtumas –

ligtol tiek Ptolemajo, tiek Koperniko teorijose dėl kelių laipsnių neatitikimo niekas nesukdavo galvos, – bet Kepleriui, žinojusiam, koks puikus stebėtojas buvo T. Brahė, toks neatitikimas buvo įtartinas (T. Brahės stebėjimų paklaida buvo mažiau nei viena lanko minutė). Taigi jis atsisakė apskritimų ir ėmėsi tirti judėjimą, paremtą kitomis kreivėmis. 1605 m., praėjus 5 metams po T. Brahės mirties, Kepleris pagaliau išsiaiškino, kaip juda planetos.

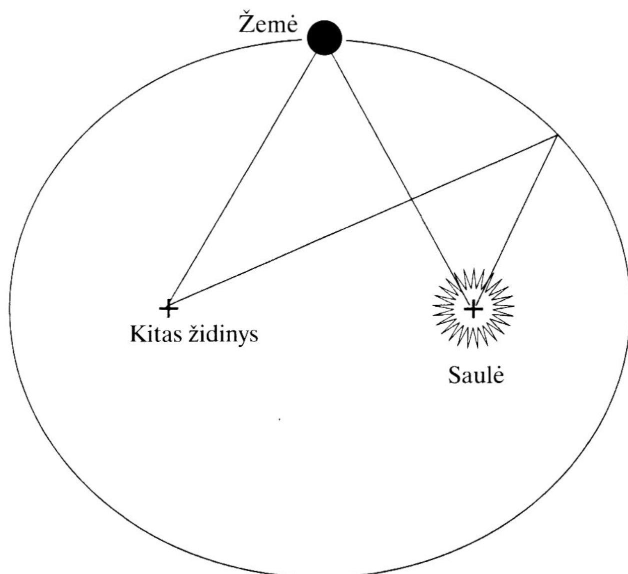
Keplerio pirmasis ir antrasis dėsniai

Planetos juda elipsėmis, kurių viename židinyje yra Saulė. Greičiausiai planetos juda būdamos arčiausiai Saulės, ir lėčiausiai – būdamos toliausiai nuo Saulės.

Keplerio judėjimas elipse reiškė galutinį atsisakymą nuo tolygiojo judėjimo apskritimu dangaus kūnų judėjimui aprašyti.

1012

Atradimai Kepleriui nebuvo lengvi. Turėjo prabėgti dar 14 metų, kol jis pastebėjo stulbinančiai paprastą sąryšį tarp planetų vidutinio nuotolio nuo Saulės ir jų skriejimo apie Saulę periodo. Planetų vidutinį nuotolį nuo



Keplerio planetos orbita yra elipsė, kuri pasižymi tuo, kad atstumų nuo bet kurio jos taško iki abiejų židinių suma yra pastovus dydis. Kepleris taip pat pateikė išsamų aprašymą, kaip kinta planetos greitis, jai judant orbita. Tai leido su ligtol neregėtu tikslumu nusakyti jų judėjimą ir būsimas pozicijas.

Planeta	Merkurijus	Venera	Žemė	Marsas	Jupiteris	Saturnas
Vidutinis nuotolis a (a.v.)	0,387	0,723	1,0	1,524	5,203	9,439
Saulės apskriejimo periodas T (metais)	0,24	0,615	1,0	1,88	11,68	29,457

Saulės Kepleris matavo Žemės nuotolio nuo Saulės atžvilgiu – vadinamaisiais *astronominiais vienetais* (a.v.). Atitinkamai ir planetų skriejimo periodus jis matavo Žemės periodo atžvilgiu, t. y. metais.

Tiesiogiai įžvelgti ką nors daugiau nei tai, kad tolstant nuo Saulės periodas T didėja, ir kad didėja greičiau nei nuotolis a, yra sunku. Bet Kepleriui galiausiai atėjo mintis palyginti įvairius laipsnius, ir taip jis atrado štai ką:

Planeta	Merkurijus	Venera	Žemė	Marsas	Jupiteris	Saturnas
Nuotolio kubas a^3	0,0058	0,38	1,0	3,54	140	868
Periodo kvadratas T^2	0,0058	0,38	1,0	3,54	140	868

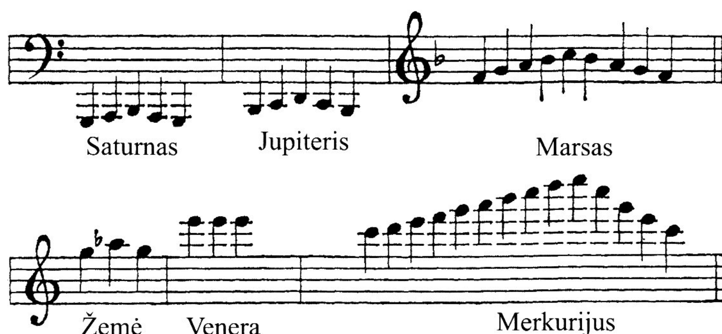
Taigi yra teisinga tokia formulė (*trečiasis Keplerio dėsnis*):

$a^3 = T^2$, a matuojant astronominiais vienetais, o T – metais.

1013 1014

Ši formulė buvo paskelbta dideliame Keplerio veikale „Pasaulio harmonijos“ 1620 m., kur astronomas taip pat išdėstė judančių planetų muzikines harmonijas. Kuo arčiau planeta prie Saulės – tuo aukštesnis jos tonas, ir kuo toliau – tuo tonas žemesnis; tokiu būdu skaitinius planetos judėjimo santykius atspindi atitinkama melodija. Kepleris buvo paskutinis iš didžiųjų astronomų, atvirai išpažinęs pitagoriečių tikėjimą pasaulio harmonijomis. Tačiau ir nūdien daug menininkų – tiek muzikantų, tiek ir dailininkų ar poetų – yra veikiami tokio pitagoriečių mąstymo.

Astronominį vienetą planetų nuotoliams iki Saulės reikšti Kepleris vartojo ne vien dėl patogumo – išmatuoti absoliučių atstumų iki planetų jis paprasčiausiai negalėjo. Tam būtų reikėję gebėti dideliu tikslumu išmatuoti, pavyzdžiui, Marso kryptį vienu metu iš dviejų skirtingų Žemės vietų – o tada stebėjimai dar nebuvo tokie tikslūs. Todėl jam teko pasinaudoti genialiu, tačiau netiksliu pusmėnulio metodu, sukurtu prieš du



Sferų muzika iš „Pasaulio harmonijų", kur Kepleris surinko visus savo atradimus apie planetų sistemos skaitinius santykius bei jų saryšį su dangiškųjų sferų muzika.

tūkstantmečius graikų astronomo Aristarcho (I dalis, 410 užduotis). Nors Kepleris ir sulaukė teleskopo išradimo, bet tik po kelių patobulinimų juo tapo įmanoma tiesiogiai nustatyti atstumus iki planetų.

Iš pradžių (1671 m.) atstumas iki Marso buvo nustatytas išmatavus Marso kryptį iš dviejų skirtingų observatorijų – iš Gvianos (Pietų Amerikoje) ir kitos Prancūzijoje. Taip pirmąkart pakenčiamu tikslumu buvo nustatytas ir Saulės sistemos dydis. Maždaug tuo metu danų astronomui O. Remeriui (*Ole Römer*, 1644–1710) pirmajam pavyko išmatuoti šviesos greitį.

Nūnai šviesos greitis yra nustatytas labai tiksliai. Pakankamai dideliu tikslumu jis yra 300 000 km/s. Taigi nuotolius Saulės sistemoje galime matuoti naudodamiesi šviesos greičiu – pasiųsdami į planetą radaro signalą ir matuodami laiką, kol tas signalas grįžta. Tokiu būdu galima tiesiogiai išmatuoti visų planetų atstumus iki pat Saturno. Pasirodo, jog vidutinis nuotolis nuo Žemės iki Saulės pakankamu tikslumu yra 150 mln. km. Taigi kol šviesa įveikia atstumą nuo Saulės iki Žemės, trunka

$$\frac{150\,000\,000}{300\,000} = 500 \text{ sekundžių.}$$

Tad Saulė yra 500 šviessekundžių atstumu nuo Žemės, arba – apie 8,3 šviesminučių. Taigi astronominį vienetą galima išreikšti šiais ekvivalentiškais būdais:

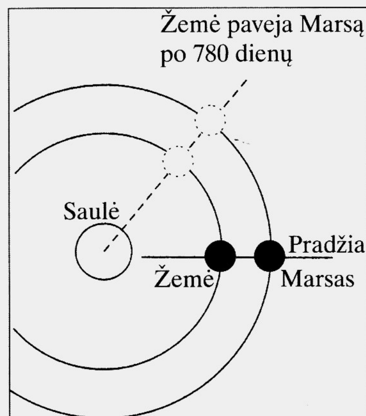
1 AV = vidutinis nuotolis nuo Žemės iki Saulės
= 150 milijonų km = 500 šviessekundžių.

Keplerio metodas

1) Marso apskriejimo apie Saulę periodas

Norėdamas nustatyti Marso orbitą, Kepleris pirmiausia turėjo rasti planetos sukimosi apie Saulę periodą, t. y. Marso metų trukmę. Tai nesunku padaryti žinant laiką, praeinantį tarp dviejų viena po kitos sekančių opozicijų.

Šio metodo principą galima suprasti įsivaizduojant Žemės ir Marso judėjimą kaip žiedines dviračių lenktynes, kur Žemė, lekianti vidiniu taku, juda greičiau. Lenktynės prasideda ties pirmąja opozicija, kur Žemė ir Marsas yra vienoje linijoje. O kai Žemė ties kita opozicija Marsą paveja, ji būna aplėkusi vienu apsisukimu daugiau nei Marsas.



Iš T. Brahės stebėjimų Kepleris žinojo, kad tarp dviejų viena po kitos sekančių Marso opozicijų yra 780 paros. Tad per tas 780 paras Žemė padaro

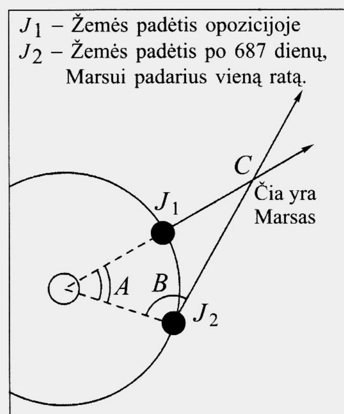
$$\frac{780}{365{,}25} = 2{,}1355 \text{ apsisukimo,}$$

nes Žemės metai yra 365,25 paros. Marsas per tą patį laiką padaro apsisukimu mažiau, t. y. 1,1355 apsisukimo per 780 parų. O tuomet Marso periodas turi būti

$$\frac{780}{1{,}1355} = 687 \text{ paros.}$$

2) Marso orbita

Dabar Kepleris žinojo, kad po 687 parų Marsas vėl būna tiksliai toje pačioje savo orbitos vietoje. Šiuo faktu jis pasinaudojo šitaip: susiradęs T. Brahės lentelėse Marso opoziciją, pasižymėjo J_1 kur tuo metu Žemė, ir taip žinojo Marso kryptį, nors atstumo ir nežinojo.

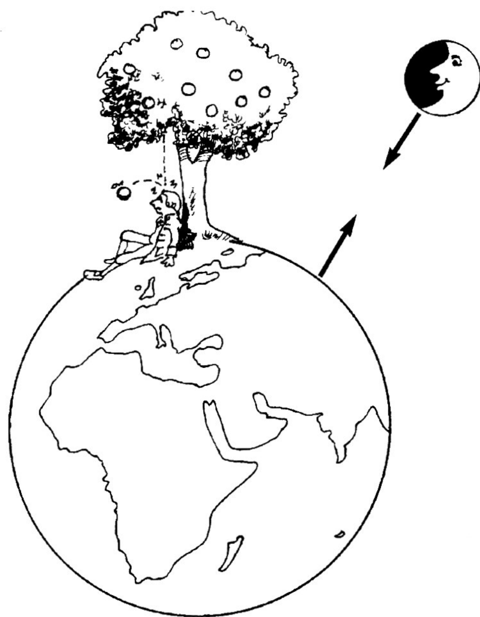


Tuomet T. Brahės lentelėse Kepleris susirado Marso stebėjimus 687 dieną po opozicijos. Čia jis galėjo rasti kampą tarp Saulės ir Marso (kampą B); ir jis taip pat žinojo, kur tuo metu yra Žemė – J_2 padėtyje. O visa tai, kaip parodyta piešinėlyje, apibrėžia kampą A. Taigi dabar jis žinojo Marso kryptį iš Žemės tiek per opoziciją, tiek ir 687 dieną po opozicijos, kuomet Marsas vėl būdavo toje pačioje savo orbitos vietoje. Todėl šį Marso orbitos tašką jis galėjo rasti kaip tų dviejų krypčių kirtimosi tašką.

Taip tęsdamas ir toliau, Kepleris rado daug Marso orbitos taškų – tokiu būdu žinodamas ne tik kur Marsas buvoja, bet ir kada ten buvoja. O tuomet šiuos duomenis galėjo gretinti su įvairiais modeliais, kurie ne tik turėjo atspindėti tinkamą orbitos formą, bet ir užtikrinti, kad Marsas reikiamoje vietoje būtų reikiamu laiku.

10.5. Sintezė

T. Brahė teikė stebėjimus, o Kepleris juos analizavo. Tačiau *kodėl* planetos laikosi tokių dėsningumų, Kepleris negalėjo paaiškinti. Už planetų judėjimo slypinčią teoriją galiausiai pateikė anglų fizikas Izaokas Niutonas. Niutonas įrodė, jog Keplerio planetų judėjimo dėsnius galima išvesti padarius prielaidą, kad tarp visų kūnų Visatoje – tiek danguje, tiek ir žemėje – veikia viena visuotinė traukos jėga. Ši traukos jėga verčia obuolį kristi nuo medžio, ši Žemės traukos jėga išlaiko Mėnulį jo orbitoje. Kadangi didžiausias dangaus kūnas yra Saulė, tai visų pirmiausia Saulė nukreipia planetas jų orbitomis, tačiau planetos traukia ir viena kitą, nors tos jėgos tarp jų kur kas silpnesnės. Vis dėlto Niutonas sugebėjo įrodyti, kad Jupiteris ir Saturnas vienas kitą traukia, kai pakankamai suartėja jungties metu – prasilenkdami jie vienas kitą sulėtina.

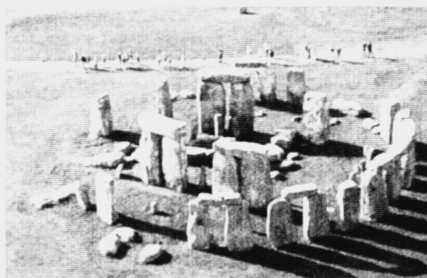


Visuotinės traukos jėgos atradimas žymėjo klasikinio pasaulio vaizdo pabaigą. Visų jo kertinių principų – krištolo rutulių, dangiškų sferų – teko atsisakyti. Paaiškėjo, kad ir danguje, ir Žemėje viešpatauja tie patys dėsniai, kad Žemė tėra tik viena iš daugelio apie Saulę skriejančių planetų, o tolygus judėjimas apskritimu – tik atskiras Keplerio judėjimo elipse atvejis, daugiau nebeužimantis astronomijoje ypatingos vietos.

Astronominiai akmenų paminklai

Stonhendže Anglijoje, Karnake Prancūzijoje, taip pat Egipte, JAV – kone visur Žemėje randama paslaptingų astronominio pobūdžio paminklų griuvėsių. Kadangi tuo metu, kai tie paminklai statyti (apie 2500 m. pr. Kr.), rašto nebuvo, apie jų paskirtį neliko jokių užrašų.

Šias senąsias „akmenų observatorijas" dažniausiai sudaro milžiniški akmenys, sustatyti taip, kad pagal juos galima labai tiksliai atsekti Žemės ir Mėnulio orbitas. Jie, ko gero, taip pat galėjo būti naudojami Mėnulio užtemimams tiksliai numatyti. Susidaryti vaizdą apie tokių „akmenų observatorijų" principą galima aplankius šiuolaikinį akmenų kalendorių, įrengtą ant Vestskoveno miške (į vakarus nuo Kopenhagos) supiltos Erstedo kalvos.



Stonhendžas.



Daniškas akmenų ratas Andebjerge, Tingskoveno miške (į rytus nuo Fjeritslevo).

Mažiau žinomi ir ne tokie dažni yra vadinamieji *Medicine Wheels*. Jų žinoma apie 50, ir išsidėstę jie nuo Uolėtųjų kalnų, JAV, iki Saskačevano Kanadoje. *Medicine Wheels* yra aukštai plokštikalnėse iš akmenų išdėlioti raštai. Atsistojus tam tikroje vietoje, galima matyti, tarkime, kur Saulė bus per vasaros saulėgrįžą. Neaišku, kodėl tie paminklai pastatyti taip sunkiai prieinamose vietose. Palangoje ant Birutės kalno irgi buvo observatorija – šventykla, kur Saulės bei Mėnulio tekėjimo ir nusileidimo kryptis įvairiais metų laikais rodė ąžuoliniai stulpai.

11. Raktas į Visatą

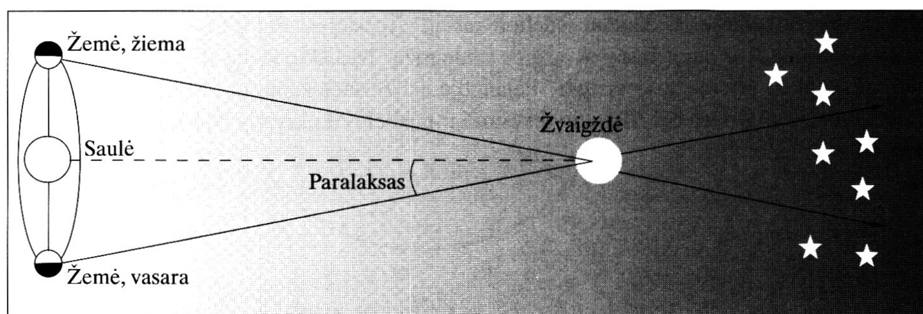
11.1. Įvadas

Įsigalėjus heliocentriniam pasaulio vaizdui, tapo aišku, kad žvaigždės, palyginus su atstumais Saulės sistemoje, turi būti nepaprastai toli. Tačiau turėjo praeiti ne vienas šimtmetis, kol buvo tiksliai išsiaiškinta, kiek toli jos ir kaip pasiskirsčiusios Visatoje. Raktas į Visatos tyrinėjimą buvo vis tobulesni teleskopai, įgalinę žvelgti į erdvę toliau ir toliau.

11.2. Kosminiai nuotoliai

Nuotoliai iki artimiausių žvaigždžių nustatomi remiantis *paralakso reiškiniu* – ta aplinkybe, kad daikto padėtis kitų daiktų atžvilgiu, žiūrint į jį iš dviejų skirtingų vietų, keičiasi. Pabandykite, pavyzdžiui, laikydami pakeltą pirštą, žiūrėti į jį pakaitomis tai viena, tai kita akimi, kitą akį užmerkę – pirštas aiškiai paslinks už jo esančių daiktų atžvilgiu.

Matuojant artimos žvaigždės kryptį skirtingais metų laikais (kad Žemė spėtų pasisukti), žvaigždė kitų tolimų žvaigždžių atžvilgiu taip pat pasislinks.



Žvaigždės paralaksas apibrėžiamas kaip kampas, kuriuo iš tos žvaigždės matoma Žemė ir Saulė, t. y. Žemės orbitos spindulys, kurio ilgį susitarta laikyti nauju nuotolio vienetu (astronominiu vienetu, žymimu a.v.).

Norint išmatuoti žvaigždės paralaksą, reikia išmatuoti skirtumą tarp jos padėčių žiemą ir vasarą. Teoriškai tai paprasta, tačiau praktiškai gana kruopštus darbas, nes krypties pokyčiai šiuo atveju esti labai maži. Štai

T. Brahė bergždžiai ieškojo žvaigždžių paralakso, ir kaip tik dėl šios priežasties jis laikė Žemę nejudančiu Visatos centru.

Išmatuoti pačių artimiausių žvaigždžių paralaksą tapo įmanoma tik nuo 1837 m., kuomet vokiečių astronomas F. Beselis (*Friedrich Bessel*) Karaliaučiaus (vokiečiai šį prūsų įkurtą miestą vadino Kionigsbergu) observatorijoje pirmą kartą išmatavo Gulbės žvaigždyne silpnai spindinčios žvaigždutės, pažymėtos 61 numeriu, paralaksą. Paaiškėjo, kad visų žvaigždžių paralaksai sudaro mažiau nei 1 lanko sekundę, t. y. mažiau nei 1/3600 lanko laipsnio. Taip yra dėl to, kad net artimiausios žvaigždės yra daugiau kaip 100 000 kartų toliau nei Saulė.

Matuoti tokius didelius Visatos nuotolius metrais ir kilometrais – nepraktiška, ir čia pasinaudojama tuo, kad šviesa per vienerius metus įveikia $9{,}5 \cdot 10^{12}$ km nuotolį. Toks ilgio vienetas vadinamas *šviesmečiu.* Taigi šviesmetis – ne laiko tarpsnis, šviesmetis yra nuotolis – milžiniškas nuotolis.

Yra teisingas toks sąryšis:

$$\text{nuotolis iki žvaigždės šviesmečiais} = \\ = \frac{3{,}27}{\text{žvaigždės paralaksas lanko sekundėmis}}.$$

Jei tik žvaigždė yra taip arti mūsų, kad įmanoma išmatuoti jos paralaksą, tai nesunkiai galime apskaičiuoti ir nuotolį iki jos. Deja, paralaksą išmatuoti įmanoma tik kelių šimtų šviesmečių atstumu.

1101 1102 1103 1104 1105

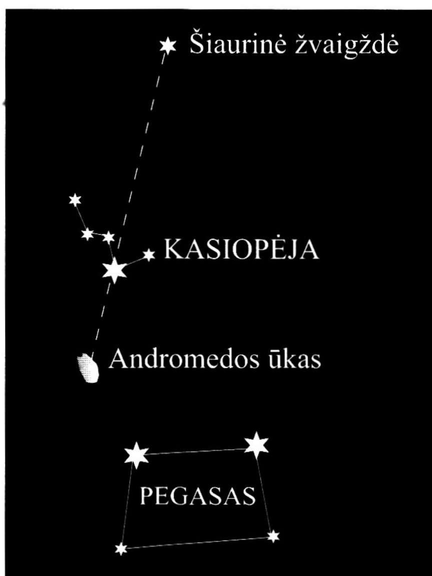
Kelionė laiku ir erdve

Kai žiūrime į žvaigždes, žvelgiame į praeitį – kuo toliau nuo mūsų yra žvaigždė, tuo ilgiau jos šviesa užtrunka, kol mus pasiekia. Nuotolius iki žvaigždžių matuoti šviesmečiais labai patogu – toks nuotolio matas pasako, kiek metų jų šviesa yra keliavusi. Štai, pavyzdžiui, Sirijaus – ryškiausios padangės žvaigždės – šviesa yra išspinduliuota prieš 8,6 metų, nes nuotolis iki Sirijaus – 8,6 šviesmečio.

Plika akimi galima žvelgti tiesiog tūkstantmečius į praeitį. O turint tikrai geras akis, galima matyti nedidelę miglotą dėmelę – Andromedos ūką, ir taip žvelgti beveik 2 milijonus metų į praeitį (vis dėlto daugumai turbūt prireiks vidutinio stiprumo žiūronų).



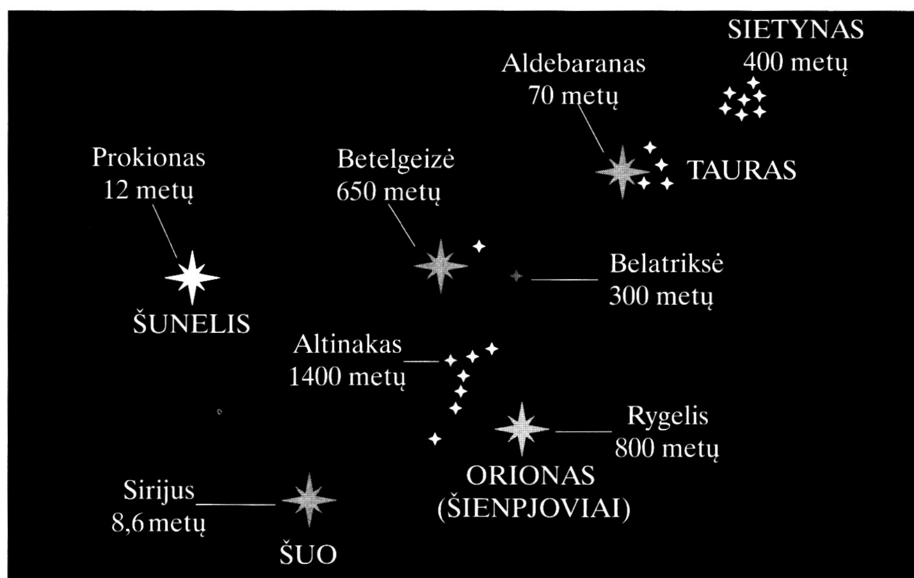
Dar gerokai prieš teleskopo išradimą Andromedos ūką atrado arabų astronomai. Paveikslėlyje pavaizduotas viduramžių Andromedos žvaigždyno piešinys, pieštas remiantis arabiškais žvaigždžių katalogais. Andromedos ūkas pavaizduotas kaip nedidelė dėmelė priešais žuvies burną. Tai tolimiausias plika akimi matomas objektas.



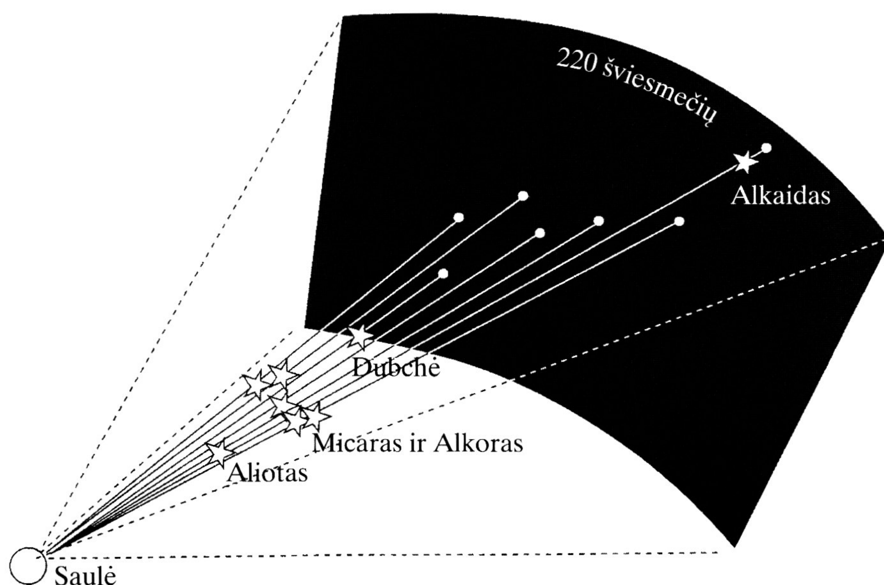
Jei mėginsite žiūronais susirasti Andromedos ūką, geriausia orientyru pasirinkti Kasiopėjos žvaigždyną, primenantį raidę W. Andromedos ūkas panašus į nedidelę miglotą dėmelę, kurios nesupainiosi su jokia žvaigžde. Andromedos ūkas nakties danguje užima tokį plotą kaip keturi Mėnuliai.

Jei keliautume tolyn nuo Saulės sistemos, žvaigždėtasis dangus imtų keistis. Iš dangaus greitai pradingtų ir Saulė. Nutolus 40 šviesmečių, plika akimi ji būtų vos vos matoma. Saule naktiniame danguje galėtume gėrėtis iš pačių artimiausių žvaigždžių (ar jų planetų); tokių nutolusių iki 40 šviesmečių apie mus tėra tik 500. Dauguma jų per mažos, kad turėtų planetų, kuriose būtų gyvybė.

1106 1107



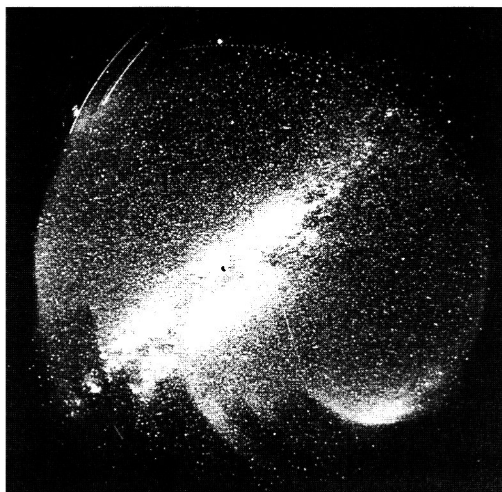
Orionas (Šienpjoviai) yra labiausiai į akis krintantis žiemos žvaigždynas. Paveikslėlyje pateikti ne tik kai kurių ryškiausių Orioną sudarančių bei jį supančių žvaigždžių pavadinimai, bet ir laikas, reikalingas jų šviesai mus pasiekti. Atkreipkite dėmesį, kad žvaigždės, dangaus skliaute atrodančios gretimos, iš tikrųjų gali būti labai toli viena nuo kitos. Štai atstumai iki Oriono bei jį supančių žvaigždžių kinta nuo maždaug 10 iki 1500 šviesmečių.



Kai žvaigždės išsidėsčiusios tokiais skirtingais nuotoliais, tikroji jų erdvinė konfigūracija yra visai kitokia nei atrodo žvelgiant į naktinį dangų iš Žemės. Paveikslėlyje pavaizduota Grįžulo Ratų žvaigždžių erdvinis išsidėstymas, kur drauge iš tikrųjų tėra tik 5 žvaigždės. Grįžulo Ratuose matome 7, o ne 8 žvaigždes dėl to, kad Micaras ir Alkoras yra dvinarė žvaigždė.

11.3. Paukščių Takas

Kai žvaigždžių paralakso išmatuoti neįmanoma, norint nustatyti nuotolį iki jų, tenka eiti kitu keliu. Vienas iš svarbiausių tokių metodų – pagal žvaigždžių ryškį. Vasaros vakarą vaikštinėjant jūros pakrante, įvertinti atstumus iki netoliese esančių vasarnamių tikrai nesunku, tačiau visi švyturiai atrodo esantys ties horizontu. Užtat apie nuotolius iki tų švyturių galima spręsti pagal jų spindesį – juo švyturys toliau, juo silpnesnė jo šviesa.



Tamsiomis giedromis naktimis danguje galima aiškiai matyti švytinčią juostą, vadinamą vaizdžiu Paukščių Tako vardu. Net nelabai stiprūs žiūronai išskiria šią juostą į miriadus žvaigždžių. Nuotrauka daryta atvira „žuvies akies" kamera, judėjusia kartu su besisukančiu žvaigždėtu dangumi. Šešėliai apačioje – tai neryškus medžių viršūnių atvaizdas, o švytintis brūkšnys viduryje – amerikiečių erdvėlaivio „Skylab", atspindėjusio Saulės šviesą, pėdsakas.

Tas pat, savaime aišku, tinka ir žvaigždėms. Tik čia kyla keblumų dėl nevienodo žvaigždžių spindesio. Todėl net jeigu žvaigždės ir atrodo vienodo spindesio, nuotoliai iki jų gali būti labai skirtingi. Pavyzdžiui, Sirijus yra visiškai eilinė žvaigždė, gerai matoma tik todėl, kad ji arti. O štai Betelgeizė ir Rygelis – milžiniškos žvaigždės, su kuriomis vis dėlto – kadangi jos taip toli – Sirijus naktiniame danguje pajėgia varžytis.

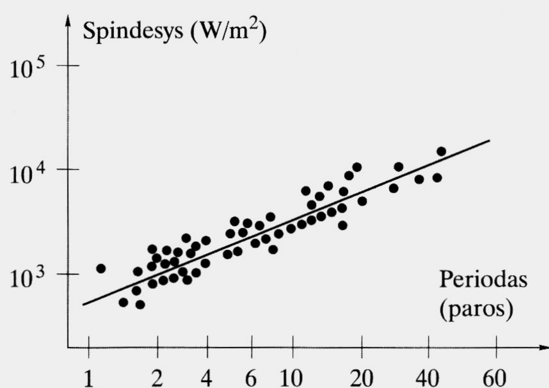
Todėl tam, kad galėtume taikyti spindesio metodą, reikalingos kai kurios standartinės žvaigždės – „dangaus švyturiai". Laimė, yra tokių lengvai atpažįstamų milžiniškų žvaigždžių, vadinamųjų *cefeidžių,* kurių spindesys periodiškai kinta, ir nuotoliui iki jų nustatyti pakaks išmatuoti to

jų spindesio kitimo periodą. Cefeidžių metodas sukėlė esminę permainą nustatant nuotolius iki tolimųjų žvaigždžių.

Cefeidžių metodas

Kad cefeidėmis galima naudotis kaip „standartine šviesa“, 1912 m. paskelbė amerikiečių astronomė H. Levit (*Henrietta Lewitt*). Ji tyrinėjo Mažojo Magelano Debesies – žvaigždžių sambūrio, matomo Pietų pusrutulyje – žvaigždes, ir iš tų žvaigždžių ji kaip tik tyrė tas vadinamąsias cefeides, kurių spindesys reguliariai kinta, t. y. stiprėja ir silpnėja tam tikru periodu. Ji pastebėjo, kad visų *vienodo* (vidutinio) *spindesio* Mažojo Magelano Debesies cefeidžių *periodas* yra *toks pat*. O kadangi visos Mažojo Magelano Debesies cefeidės yra vienodai nutolusios nuo Žemės, mokslininkė padarė išvadą, kad tarp jų spinduliavimo galios ir spindesio kitimo periodo turi būti kažkoks ryšys. Todėl išmatavę cefeidės periodą, žinosime ir jos spinduliavimo galią (visomis kryptimis žvaigždės skleidžiamų spindulių kiekį), vadinamą šviesiu. O palyginę žvaigždės šviesį su jos spindesiu (Žemę pasiekusių žvaigždės spindulių kiekiu), galėsime apskaičiuoti ir tiriamosios žvaigždės nuotolį.

Cefeidės – tai milžiniškos žvaigždės, kurias nesunku aptikti ir dideliais atstumais. Bet, deja, nėra žinoma tiek arti esančių cefeidžių, kurių paralaksą (o kartu ir atstumą) būtų galima išmatuoti tiesiogiai. Todėl tenka remtis nuotolių iki artimiausiųjų cefeidžių įverčiais.



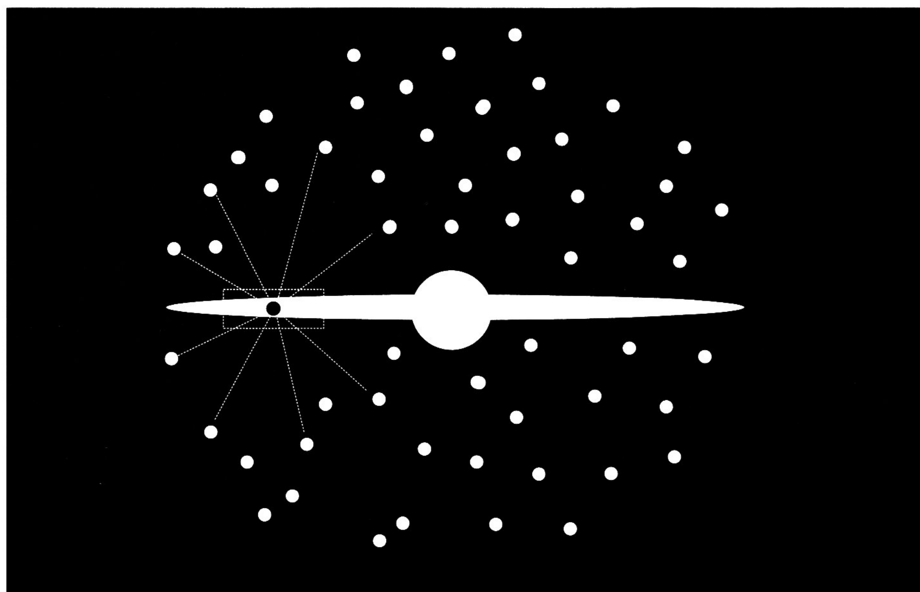
Sąryšis tarp Mažojo Magelano Debesies cefeidžių, esančių daugmaž vienodu atstumu nuo Žemės, periodo ir spindesio.

Pirmiausia cefeidžių metodas buvo pritaikytas mūsų Galaktikos formai ir dydžiui tirti. (Galaktikomis vadiname didžiulius žvaigždžių telkinius, kurių kiekviename yra šimtai milijonų, milijardai, šimtai milijardų ar net trilijonai žvaigždžių. Mūsų Galaktika dar vadinama Paukščių Tako galaktika.) Nuo teleskopo išradimo žinota, kad nakties danguje regima švytinti juosta iš tikrųjų susideda iš miriadų žvaigždžių; taip pat žinota, kad didelė dalis tų žvaigždžių susibūrusios į plokščią disko formos darinį

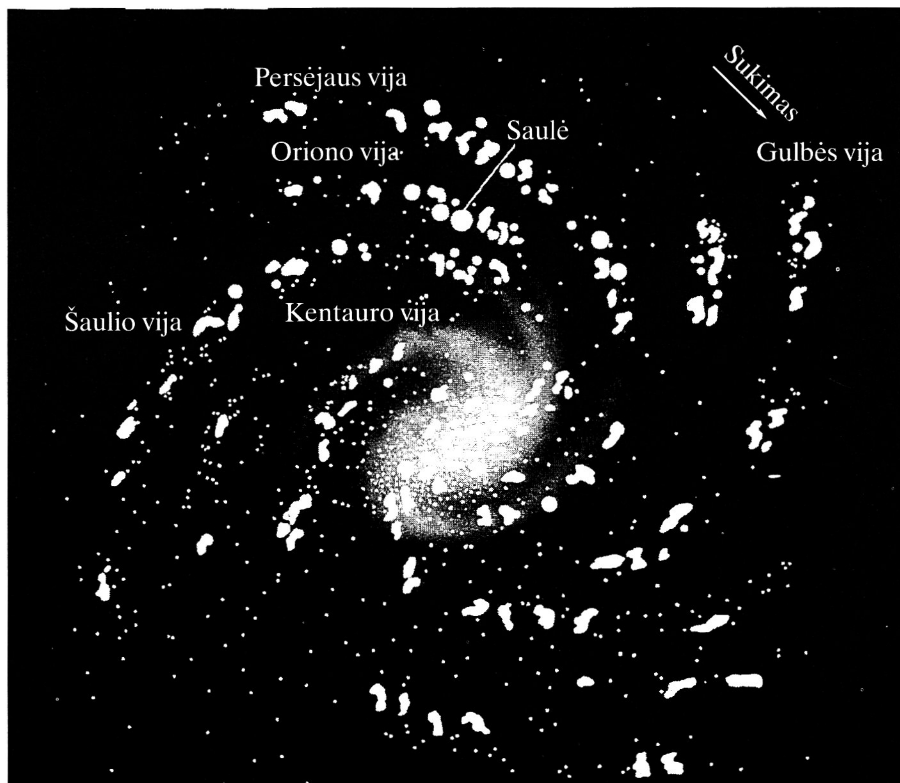
ir kad švytinčią juostą matome kaip tik dėl to, kad žiūrime į tą diską iš šono. Tačiau nebuvo žinoma, kur tiksliai tame diske yra Saulė, ir ilgą laiką buvo klaidingai manoma Saulę esant Paukščių Tako galaktikos centre.

Be žvaigždžių, Paukščių Take dar yra daugybė dujų ir dulkių, slopinančių vaizdą, ir dėl to pažvelgti į disko gelmes neįmanoma. Tačiau, be miriadų pavienių žvaigždžių, mus dar supa šimtai *kamuolio formos spiečių*, kurių kiekviename gali būti šimtai tūkstančių žvaigždžių. Šie kamuoliniai spiečiai išsidėstę didelėje srityje apie Paukščių Tako galaktikos centrinį diską, kur vaizdo netemdo dulkės ir ūkai.

Ištyrus tų kamuolinių spiečių cefeides, buvo nustatyti nuotoliai iki spiečių, o kartu ir jų pasiskirstymas. Paaiškėjo, kad Žemės atžvilgiu jie pasiskirstę aiškiai asimetriškai – kai kuriomis kryptimis jų kur kas daugiau, ir jie toliau. Taip buvo pirmąkart įsitikinta, kad Saulė *nėra* Paukščių Tako galaktikos centre, o veikiau pakraštyje.



Paukščių Tako galaktiką, kaip nūnai ją įsivaizduojame, sudaro centrinis diskas, apsuptas kamuolinių žvaigždžių spiečių. Rėmeliu apvesta ta Paukščių Tako galaktikos dalis, kurią galime matyti tiesiogiai. Paukščių Tako galaktikoje yra apie 200 milijardų žvaigždžių, o jos skersmuo – apie 100 000 šviesmečių.



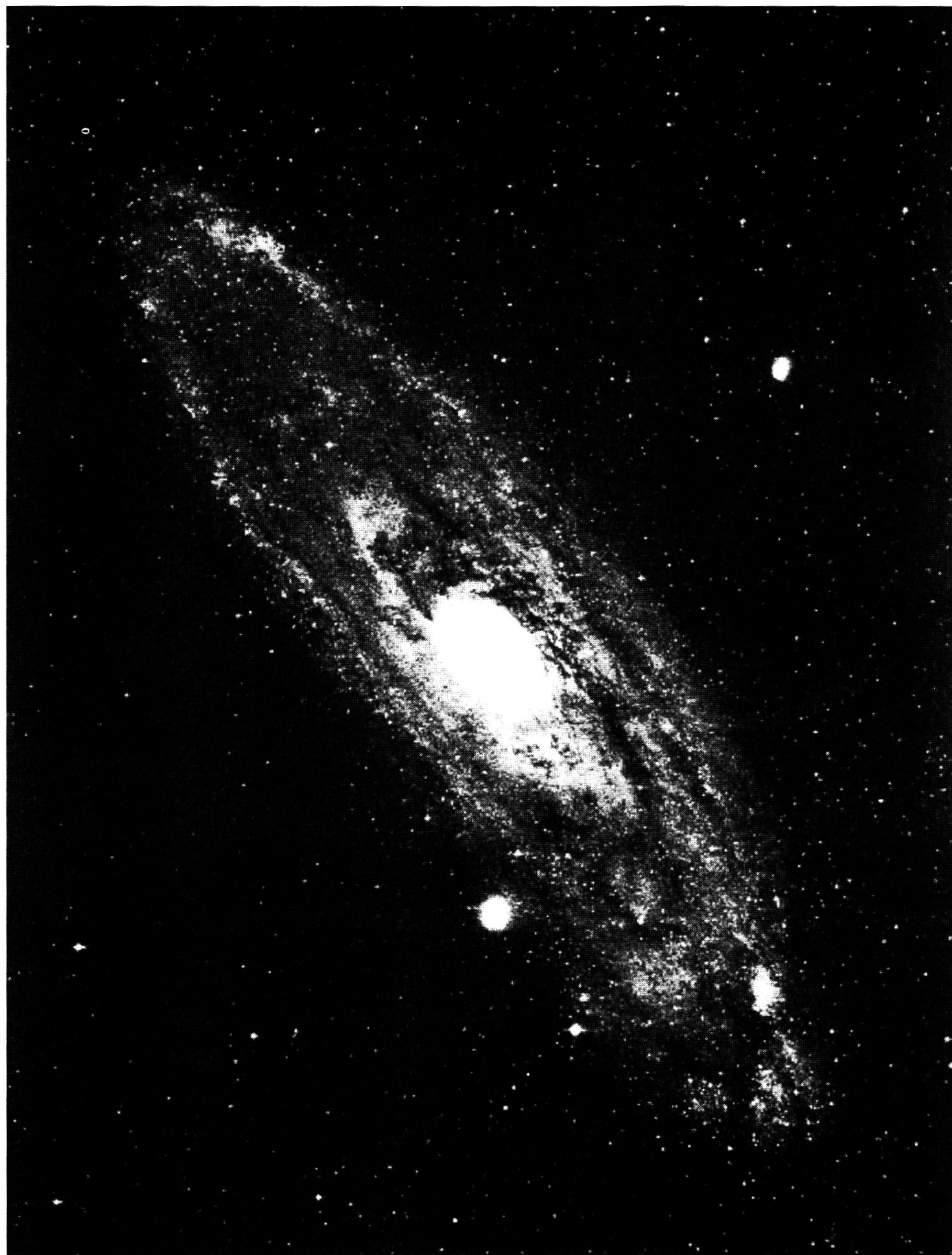
Pažvelgę į Paukščių Tako galaktiką iš viršaus, aiškiai pamatytume spiralinę struktūrą. Saulė yra vienos tokios vijos, vadinamosios Oriono vijos, pradžioje. Nuo Paukščių Tako galaktikos centro Saulė yra apie 30 000 šviesmečių. Paukščių Tako galaktika nėra rami, o sukasi padarydama per 250 milijonų metų vieną apsisukimą.

11.4. Ar Paukščių Tako galaktika vienintelė Visatoje?

Iki šio amžiaus trečiojo dešimtmečio vis tebebuvo neaišku, ar Paukščių Takas – vienintelis didelis žvaigždžių telkinys Visatoje, ar aplinkui yra dar ir kitų panašių žvaigždžių sistemų. Žinota miglotomis dėmelėmis atrodančių žvaigždžių sambūrių, galėjusių tikti kandidatais į tokias „žvaigždžių salas“, tačiau buvo neaišku, ar jie nėra tik vietiniai žvaigždžių telkiniai Paukščių Tako valdose, kaip ir kamuoliniai spiečiai.

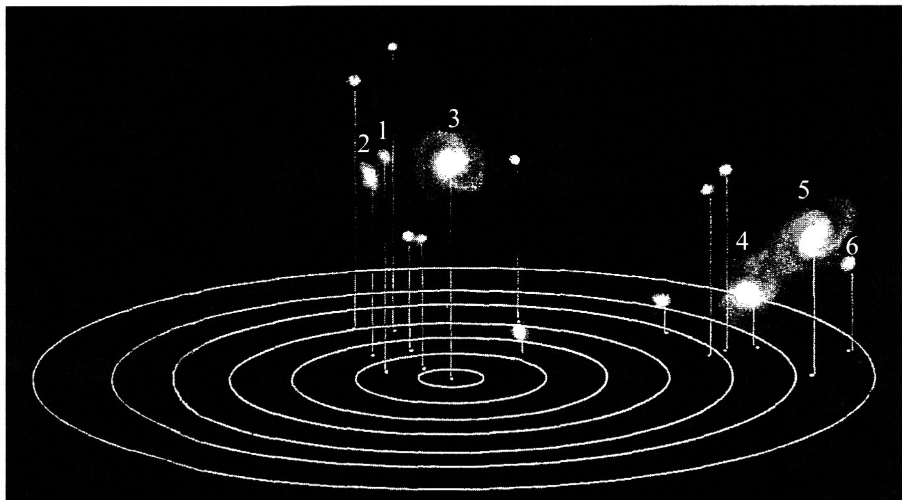
Tik kai 1923 m. E. Hablas (*Edwin Hubble*) Andromedos ūke aptiko cefeidę, pagaliau buvo įsitikinta, jog nuotolis iki Andromedos ūko toks didelis, kad šis ūkas turi būti gerokai už Paukščių Tako ribų. Tai buvo šiuolaikinės Visatos sampratos pradžia.

15. 936



Andromedos galaktika kartu su savo palydovėmis galaktikomis. Andromedos galaktika yra Paukščių Tako galaktikos dvynė. Manoma, kad Paukščių Tako galaktika, pažvelgus į ją iš Andromedos galaktikos, atrodytų labai panašiai.

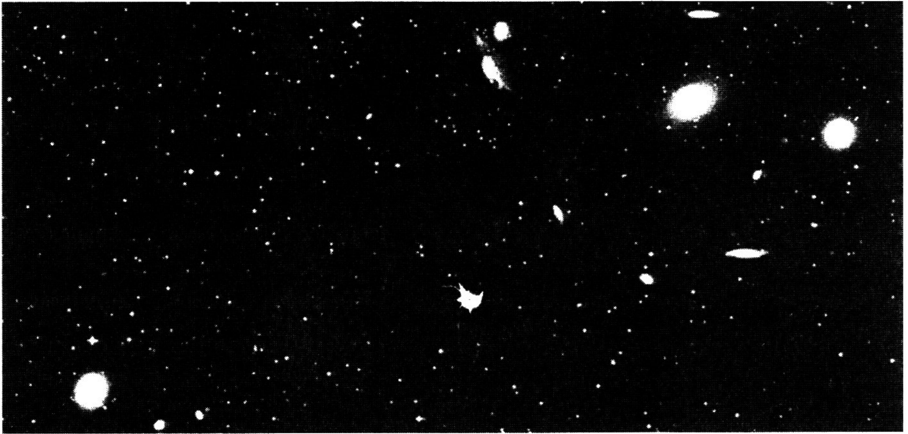
Andromedos ūkas yra artimiausias didesnis Paukščių Tako kaimynas, tačiau „žvaigždžių salų“ apie mus yra visur. Jos vadinamos *galaktikomis* – pagal graikų k. žodį *gala,* reiškiantį „pienas“. Panašu, kad galaktikos susitelkusios į grupes ir *spiečius,* kurie savo ruožtu susibūrę į *superspiečius.* Paukščių Takas ir Andromedos galaktika yra du didžiausi nariai mūsų vietinės grupės, jungiančios apie šimtą didesnių ir mažesnių žvaigždžių telkinių, dalis kurių – kaip Magelano debesys – tėra didesniųjų galaktikų palydovės.



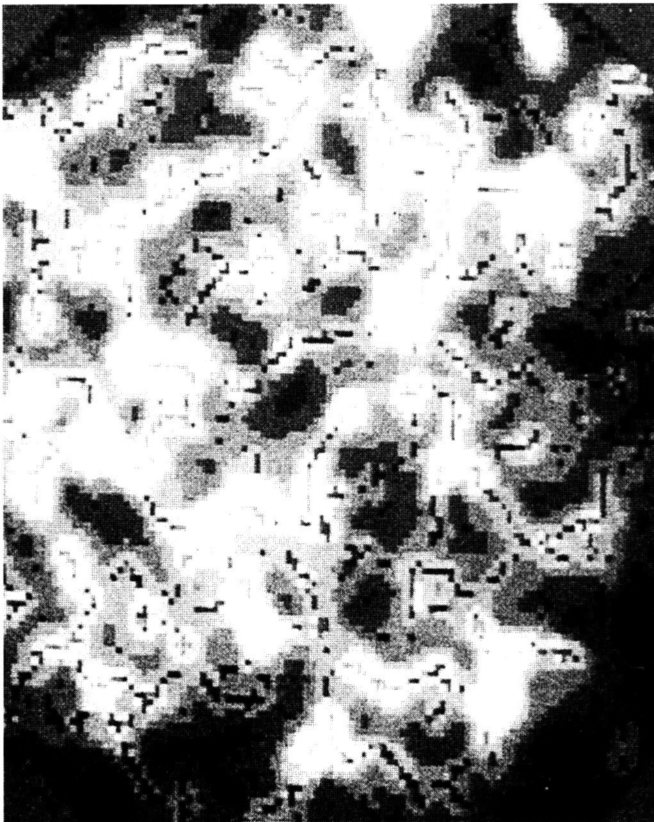
Kai kurie vietinio spiečiaus nariai: 1. *Mažasis Magelano Debesis,* 2. *Didysis Magelano Debesis,* 3. *Paukščių Tako galaktika,* 4. *Trikampio galaktika,* 5. *Andromedos galaktika,* 6. *M32.*

Mūsų vietinė grupė yra pakraštyje vietinio superspiečiaus, kurio centrinis spiečius matomas Mergelės žvaigždyne, dėl ko šis spiečius vadinamas Mergelės (*Virgo*) spiečiumi, o visas superspiečius vadinamas Mergelės superspiečiumi. Mergelės spiečiaus galaktikos išsidėsčiusios apie 50 milijonų šviesmečių nuo mūsų. Tai didžiausias nuotolis, kuriuo šiandien dar galima identifikuoti cefeides ir dėl to būti tikri dėl atstumo.

Anksčiau manyta, kad superspiečiai po visą Visatą pasiskirstę tolygiai, bet pastaruoju metu linkstama į tai, kad stebėjimai rodo Visatą esant sutvarkytą kitaip. Visatoje yra didelių, šimtų milijonų šviesmečių skersmens kosminių ertmių, o galaktikos susikoncentravusios plonais sluoksniais, skiriančiais tas ertmes. Visata tarsi užpildyta muilo burbulais, kur galaktikos aplipusios burbulų sieneles.



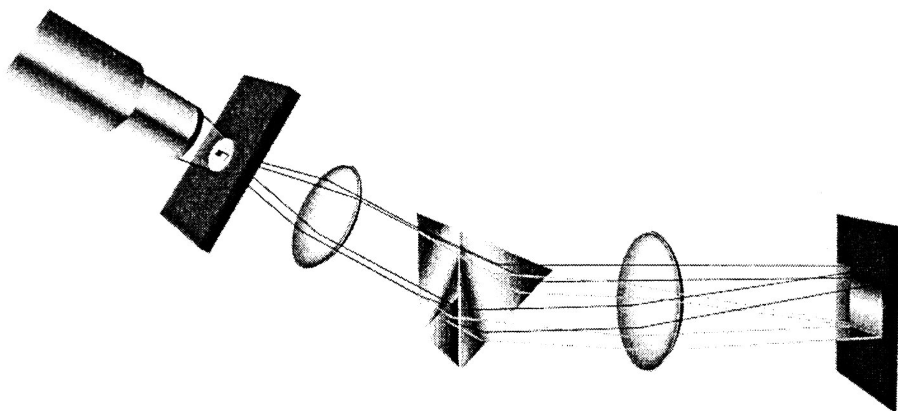
Mergelės spiečius – artimiausias didesnis galaktikų spiečius, esantis už 50 milijonų šviesmečių.



Paveikslėlyje pavaizduota 400 000 galaktikų Visatoje. Jos pasiskirsčiusios netolygiai, su ertmėmis. Didžiausia koncentracija yra šviesiose vietose.

11.5. Kosmologinis raudonasis poslinkis

Nors jau seniai žinota, kad žvaigždės nėra amžinos, tačiau šio šimtmečio pradžioje buvo įprasta manyti, kad pati Visata yra nekintama. Žvaigždės atsiranda ir išnyksta, o galaktikos lieka. Taip manė net A. Einšteinas – nepaisant to, kad jo bendroji reliatyvumo teorija aiškiai rodė, jog nekintama Visata nebūtų stabili – ji arba sugniužtų, arba imtų plėstis. Bet šiuosyk A. Einšteinas netikėjo savo paties teorija ir taisė lygtis. Tuo tarpu amerikiečių astronomas E. Hablas trečiąjį dešimtmetį padarė dar vieną atradimą, atveriantį kelią naujai epochai: spiraliniai ūkai – tai dideli žvaigždžių telkiniai, t. y. galaktikos, pasklidusios po Visatą toli už mūsų Paukščių Tako galaktikos ribų, ir dargi tolimiausiosios jų aiškiai tolsta nuo mūsų.

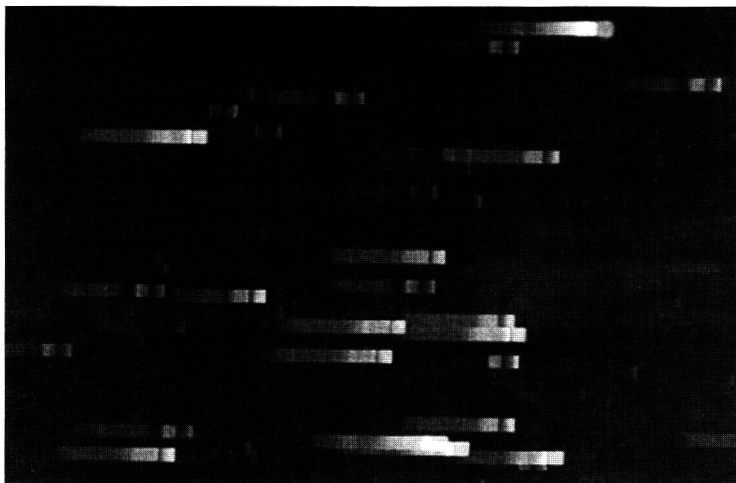


Spektroskopija. Tolimųjų galaktikų šviesa surenkama dideliu – pavyzdžiui, veidrodiniu Maunt Palomaro (kurio skersmuo – 5 metrai) – teleskopu. Iš pradžių šviesa praeina siaurą plyšį, po to lūždama prizmėje suskyla į spektrą, o spektras užfiksuojamas fotografijos plokštelėje. Lęšiai reikalingi spinduliams lygiagrečiai nukreipti.

Šis atradimas buvo padarytas išstudijavus galaktikų spektrus. Žinota, kad žvaigždžių (o kartu ir galaktikų) spektruose yra juodų dryžių – tarsi tų žvaigždžių atmosferoje esančių medžiagų „pirštų atspaudų“ (plg. I dalies 10 skyrių). Pavyzdžiui, juose galima aptikti keturias būdingas vandenilio spektro linijas:

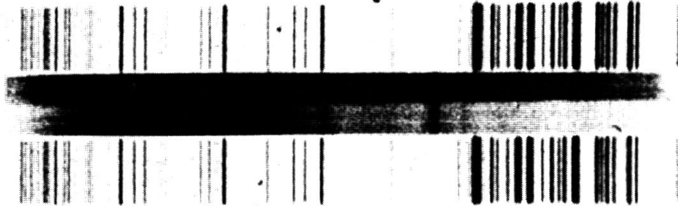
Spektro linija	H_α	H_β	H_γ	H_δ
Bangos ilgis	565 nm	486 nm	434 nm	410 nm

O mėlynai violetinėje spektro dalyje galima pastebėti ypač būdingas greta esančias 393 nm ir 396 nm ilgio bangų linijas, kurios atsiranda dėl žvaigždžių atmosferoje esančių kalcio jonų.



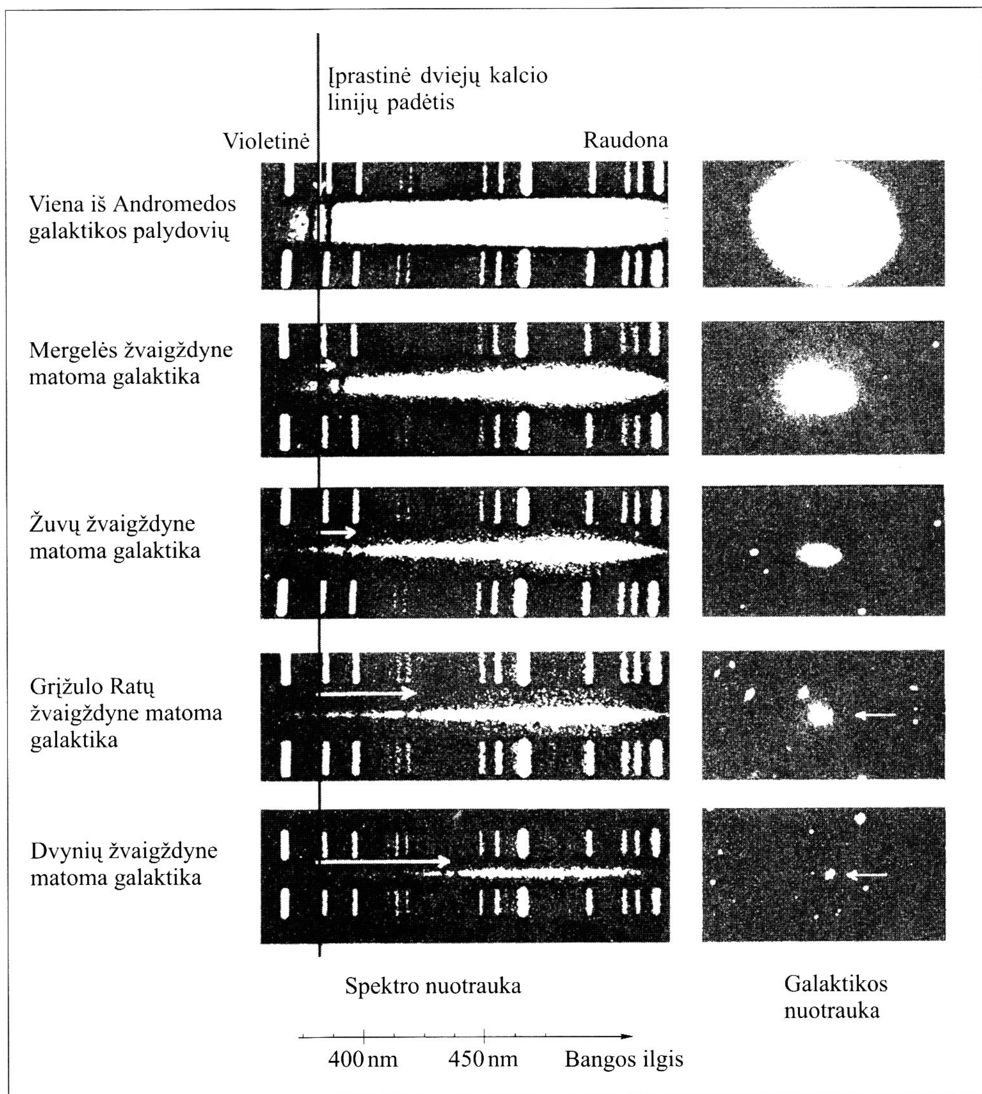
Žvaigždžių spektrai, fotografuoti pro teleskopą. Atkreipkite dėmesį į sugerties linijas ir kad skirtinguose spektruose vyrauja skirtingos spalvos. Galinga žvaigždė viršuje su „išsiliejusia" raudonąja spektro dalimi yra „Raudonoji jaučio akis" – Aldebaranas.

Priešingai nei žvaigždžių, galaktikų spektrai yra blyškesni, todėl juose kur kas mažiau detalių. Tolimiausi objektai, kuriuos galima stebėti dideliais teleskopais, yra *kvazarai*. Kvazarai – tai tolimų galaktikų branduoliai – tokių tolimų, kad jų detalių apie branduolį neįmanoma išskirti, ir todėl fotonuotraukoje kvazaras atrodo kaip žvaigždė; iš čia ir toks pavadinimas (anglų k. *quasi-stellar* – tarsi žvaigždė).



Kvazaro 3C273 spektras. Paties kvazaro spektras yra viduryje, o iš šalių – laboratorijoje gauti kontroliniai spektrai. Ryškiausia linija kvazaro spektre yra H_β *linija ties 564 nm, pareinanti iš vandenilio spektro. Kairėje nuo šios ties 503 nm galima įžvelgti* H_γ *liniją. Atkreipkite dėmesį, kad šie bangų ilgiai yra didesni nei atitinkamų vandenilio linijų, gautų laboratorijoje.*

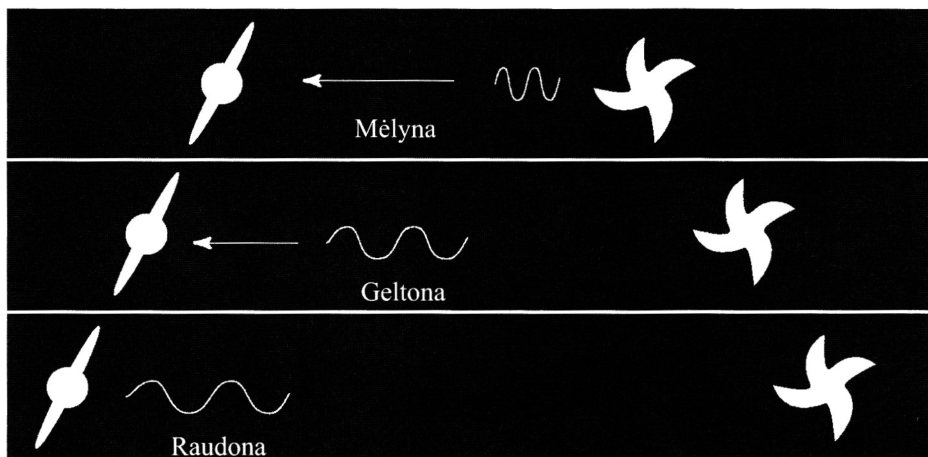
Ir štai čia, gretindamas šviesą iš tokių tolimų galaktikų su šviesa, gauta iš laboratorinio šaltinio, Hablas pastebėjo, kad galaktikos spektro dryžiai yra pasislinkę dešinėn, t. y. raudonojo spektro galo link. Ir tai dar ne viskas: kuo tolimesnė galaktika, tuo daugiau buvo pasislinkę jos dryžiai.



Hablo originalaus paveikslėlio, iliustruojančio sąryšį tarp raudonojo postūmio ir nuotolio, fragmentas. Būtent tokie paveikslėliai padėjo išaiškinti Visatos plėtimąsi.
a) Dešinėje matome galaktikas: kuo jos regimos mažesnės, tuo turi būti toliau.
b) Kairėje matome tų galaktikų spektrus: kaip ir praeitame paveikslėlyje, jos įspraustos tarp dviejų kontrolinių spektrų.
Atkreipkite dėmesį, kad juo galaktika toliau, juo menkesnis jos spektras. Horizontali strėliukė rodo, kiek tos dvi būdingosios kalcio linijos yra pasislinkusios normalios padėties atžvilgiu. Taigi kuo galaktika tolimesnė, tuo daugiau pasislinkęs jos spektras.

Kodėl taip yra? Pasirodo, tai labai sudėtingas klausimas, sukėlęs gausybę spekuliacijų. Vienintelis nūdien visuotinai pripažintas šio reiškinio aiškinimas yra toks: mes registruojame pailgėjusias bangas, kitaip sakant, padidėjusius atstumus tarp bangos pūpsnių todėl, kad didėja nuotolis tarp bangų šaltinio ir mūsų. Vadinasi, visos galaktikos tolsta viena nuo kitos. Kuo didesniu greičiu dvi galaktikos viena nuo kitos tolsta, tuo toliau suspėja atsidurti.

Tad kosmologinis raudonasis poslinkis tiesiogiai atspindi Visatos plėtimąsi. Visata nėra nekintanti. Einšteinas klydo.



Kai šviesa sklinda iš vienos galaktikos į kitą, jos bangų ilgis, Visatai plečiantis, didėja. Viršutiniame piešinėlyje sklinda išspinduliuota mėlyna šviesa (mažo bangos ilgio), o apatiniame ji atsklinda raudona (didelio bangos ilgio). Šviesai bekeliaujant, Visata išsiplėtė, todėl, beje, padidėjo atstumas tarp galaktikų.

Kaip tai suprasti? Didėja ne galaktikos, o *atstumai tarp galaktikų*. Taigi *erdvė* tarp galaktikų vis didėja. Visatą galima įsivaizduoti kaip kylantį pyragą su razinomis – ilgainiui, pyragui kylant, atstumai tarp razinų vis didėja, tačiau razinos nekinta. Razinos – tai galaktikos, o tešla – tai erdvė, kurioje yra medžiaga (t. y. galaktikos).

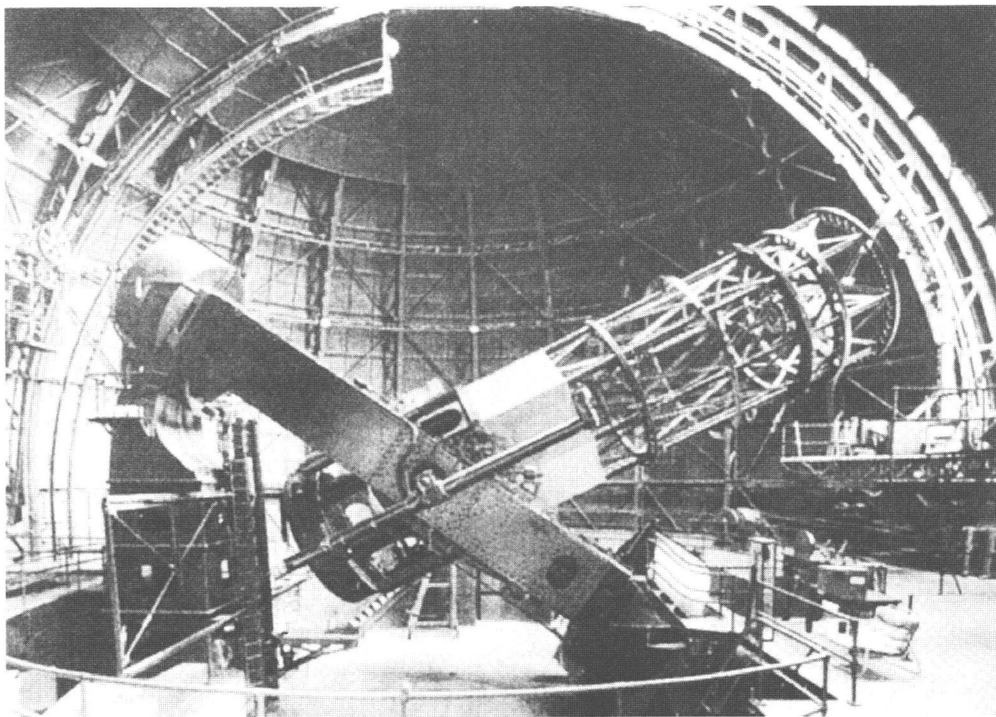
O jeigu Visatos „filmą suktume atgal", tai Visata imtų trauktis, o kartu – mažėjant vietos – imtų didėti galaktikų tankis. Bet taip negalėtų tęstis iki begalybės, ir, greičiausiai, sukdami filmą atgal, pasiektume tokį tašką, kai Visatos medžiaga sugniužtų. Taigi Visata, kokią mes ją šiandien pažįstame, egzistuoja baigtinį laiką arba, kitais žodžiais tariant, Visata turėjo pradžią – Didįjį sprogimą (angliškai – *The Big Bang*).

O žvelgiant į ateitį, į Visatos likimą, matyti štai kokios dvi iš esmės skirtingos galimybės. Visata plėsis iki begalybės, tapdama vis rečiau

apgyvendinta galaktikų, kurios, žvaigždžių branduoliniam kurui išdegus, pamažėle „išmirs“. Bauginanti perspektyva – kad Visata lėtai, bet galutinai išblės.

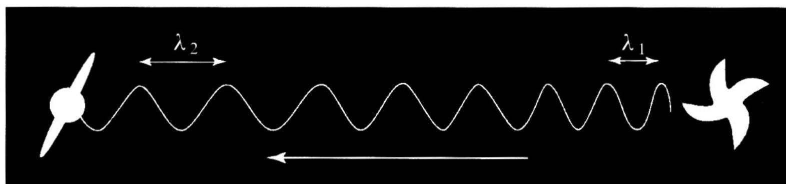
Tačiau taip pat įmanoma, kad galaktikų tarpusavio traukos jėgos (visuotinės traukos jėgos) ne tik pajėgs sustabdyti plėtimąsi, bet jį apgręžti taip, kad Visata vėl ims trauktis. Tokiu atveju vaizdas bus toks pat, kaip ir „sukant filmą atgal“. Galaktikų tankis didės iki tokio taško, kai Visatos medžiaga sugniuš. Visata, taip sakant, bus sutriuškinta visuotinės traukos jėgos gniaužtų. Tad Visata turi ir pradžią, ir pabaigą – Didįjį sutriuškinimą (angliškai – *The Big Crunch*).

Kuri įvykių eiga ateityje laukia Visatos, priklausys nuo visuotinės traukos jėgų stiprumo, o jas lemia *Visatos masės tankis* – kuris, deja nėra taip tiksliai žinomas, kad galėtume šiandien numatyti savo likimą.



Žemės akis. Didysis Maunt Vilsono observatorijos veidrodinis teleskopas nuo 1917 iki 1947 m. buvo didžiausias pasaulio teleskopas. 2,5 metrų skersmens veidrodis yra įtaisytas vamzdžio gale (nuotraukoje – kairėje). Štai šiuo teleskopu Hablas ir padarė epochos atradimą – apie Visatos plėtimąsi. Hablas galaktikos spektre stebėjo kalcio linijas. Kadangi gamtos dėsniai yra visuotiniai, tai tos linijos – ar jos iš galaktikos, ar gautos laboratorijoje – turi būti tų pačių bangos ilgių, t. y. tos pačios spalvos. Ir vis dėlto linijos pasislinkusios link raudonosios spektro dalies, ir kuo tolimesnė galaktika, tuo daugiau. Tai ir yra Visatos plėtimosi įrodymas.

Raudonasis šviesos poslinkis



O dabar įvesime tikslų raudonojo šviesos poslinkio matą. Jei išspinduliuotos šviesos bangos ilgis λ_1, o priimtos – λ_2, tai pasirodo, kad *santykinis* tos λ_1 ilgio bangos *padidėjimas* nepriklauso nuo to, kokio ilgio turime bangą. Kaip pavyzdį imkime kvazaro 3C 273 spektrą, kur su tiksliais prietaisais galima išmatuoti tikslias keturių jo vandenilio spektro linijų padėtis:

Vandenilio spektro linijos	H_α	H_β	H_γ	H_δ
3C 273 (λ_2)	760 nm	564 nm	503 nm	476 nm
Kontrolinis spektras (λ_1)	656 nm	486 nm	434 nm	410 nm

Įdomu čia tai, kad santykis $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ visoms linijoms yra vienodas:

$$\frac{760}{656} = 1{,}16, \quad \frac{564}{486} = 1{,}16, \quad \frac{503}{434} = 1{,}16, \quad \frac{476}{410} = 1{,}16.$$

Todėl sakome, kad kvazaro spektro raudonasis poslinkis yra 16%.

Jei išspinduliuotos šviesos bangos ilgis λ_1, o priimtos – λ_2, tai raudonojo poslinkio rodiklis z apibrėžiamas kaip *santykinis* bangos ilgio padidėjimas:

$$z = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1}.$$

1109 1110

Raudonojo poslinkio rodiklį z galima interpretuoti dvejopai:

1) Kaip *erdvės plėtimosi* matą. Jei, pavyzdžiui, z yra 20%, tai ne tik rodo, kad bangos ilgis išaugo 20%, bet ir kad atstumai tarp galaktikų padidėjo 20%, t. y. kad kol šviesa sklido, erdvė padidėjo 20%.
2) Kaip *greičio* v, kuriuo tolimoji galaktika (dėl erdvės plėtimosi) tolsta nuo mūsų, matą. Jei tik galaktika nėra labai toli, tai raudonojo poslinkio rodiklis z rodo, kokią *dalį šviesos greičio sudaro* galaktikos greitis v. Pavyzdžiui, jei z yra 20%, tai reiškia, kad galaktika tolsta nuo mūsų greičiu, lygiu 20% šviesos greičio.

Ryšys tarp raudonojo poslinkio ir greičio

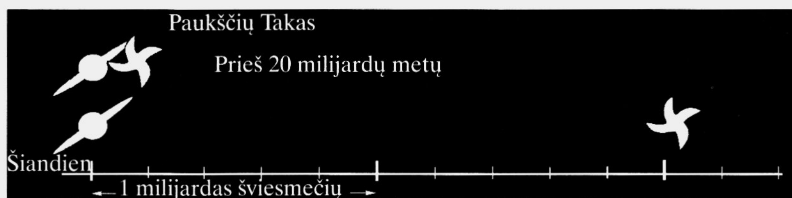


Sakykime, kad iš tolimos galaktikos į mus išspinduliuojama šviesa. Kol ji keliauja, erdvė plečiasi. Jei raudonojo poslinkio skaičius bus, tarkim, 10%, tai reiškia, kad per tą laiką, kol šviesa pasiekė Paukščių Taką, nuotolis iki galaktikos padidėjo 10%. Taigi galaktika nutolo atstumu, sudarančiu 1/10 šviesos įveikto kelio*. Todėl tas greitis, kuriuo glaktika tolsta nuo mūsų, lygus 1/10 šviesos greičio.

Pavyzdys

Jei nuotolis iki galaktikos tuo metu, kai buvo išspinduliuota šviesa, sudarė 2 milijardus šviesmečių, tai reiškia, kad šviesa kelyje užtrukusi 2 milijardus metų. Per tą laiką galaktika nutolo per 0,2 milijardo šviesmečių. Taigi greitis, kuriuo galaktika tolsta nuo mūsų, yra toks:

$$\frac{0{,}2 \text{ milijardai šviesmečių}}{2 \text{ milijardai metų}} = \frac{0{,}2 \text{ milijardai metų} \cdot 300\,000\,\text{km/s}}{2 \text{ milijardai metų}} = \frac{1}{10} \cdot 300\,000\,\text{km/s}.$$



Jei ši galaktika visą laiką tolo nuo mūsų greičiu, lygiu 1/10 šviesos greičio, tai galime atsukę laiką atgal pažiūrėti, kuomet ji buvo šalia Paukščių Tako. Jei atstumas tarp galaktikos ir Paukščių Tako – 2 milijardai šviesmečių, tai šviesai jį įveikti reikės 2 milijardų metų. O galaktikai įveikti tą patį atstumą reikės 10 kartų daugiau laiko. Vadinasi, šalia Paukščių Tako ši galaktika buvusi prieš 20 milijardų metų – labai seniai, kuomet dar, reikia manyti, nebuvo nei tolimų galaktikų, nei Paukščių Tako. Saulės sistemos amžius yra tik 5 milijardai metų, o visos Paukščių Tako galaktikos – vargu ar daugiau nei 15 milijardų.

1112 1113

*Čia mes truputį gudraujame. Kadangi erdvė plečiasi šviesai sklindant, tai šviesai tenka įveikti šiek tiek didesnį kelią nei pradinis atstumas tarp galaktikos ir Paukščių Tako. Galima įrodyti, kas šis mūsų netikslumas nereikšmingas, palyginus su paklaida, kuri neišvengiama nustatant nuotolį iki galaktikos.

11.6. Visatos sutvėrimas

Sutvėrimo mitai

Aš patyriau baisųjį Visatos sunaikinimą. Aš mačiau viską vėl ir vėl, po kiekvieno rato griūvant. O, siaubingas laikas, kai kiekvienas atomas suyra iki savo pirmienos – amžinybės vandens, iš kurio viskas savo laiku yra kilę.

(Mahabharata, Indija, 300 m. pr. Kr.–300 po Kr.)

Pradžioje Dievas sukūrė dangų ir žemę. O žemė buvo padrika ir dyka, tamsa gaubė bedugnę, ir vėjas iš Dievo dvelkė viršum vandenų.

Tuomet Dievas tarė: „Tebūna šviesa!“ Ir šviesa pasirodė.

(Pradžios knyga, Senasis Testamentas. Vertė kun. A. Rubšys)



Pagal induizmą, Visata yra cikliška, patirianti begalinę mirčių ir atgimimų seką. Visata – tai tik sapnas Dievo, kuris po šimto Brahmanų metų (8,64 milijardų metų) pereina į besapnį miegą, taip pat trunkantį 100 Brahmanų metų, o po to vėl prasideda naujas kosminio sapno ratas. Paveikslėlyje pavaizduotas Šivos šokis, simbolizuojantis Pasaulio sutvėrimą ties naujo ciklo pradžia.



Pagal islamą, judaizmą ir krikščionybę, Visata egzistuoja baigtinį laiką. Piešinėlyje pavaizduotas tradiciškai suvokiamas Visatos sukūrimas – Dievas sukuria pasaulį su rojumi centre. Rojuje pavaizduoti pirmieji žmonės – Adomas ir Ieva, bei žvėrys ir paukščiai; aplinkui – Mėnulis, Saulė ir žvaigždės, o galiausiai iš kraštų – „Dievo vandenys“. Pagal Biblijoje pateiktą giminės seką, Visatos amžius tradiciškai vertinamas 5000 metų.

Pačioje pradžioje buvo sprogimas. Bet ne toks sprogimas kaip įprasta Žemėje, prasidedantis tam tikrame taške ir vis labiau besiplečiantis į artimiausią aplinką. Tai buvo sprogimas iš karto visur, užpildęs visą erdvę nuo pat pradžių, visoms materijos dalelėms išsilakstčius viena nuo kitos. Maždaug po vienos šimtosios sekundės – pirmojo laiko momento, nuo kurio galima drįsti liudyti – Visatos temperatūra tapo apie šimtą tūkstančių milijonų (10^{11}) Celsijaus laipsnių.

S. Vainbergas (*Steven Weinberg*). Trys pirmosios minutės, 1977.

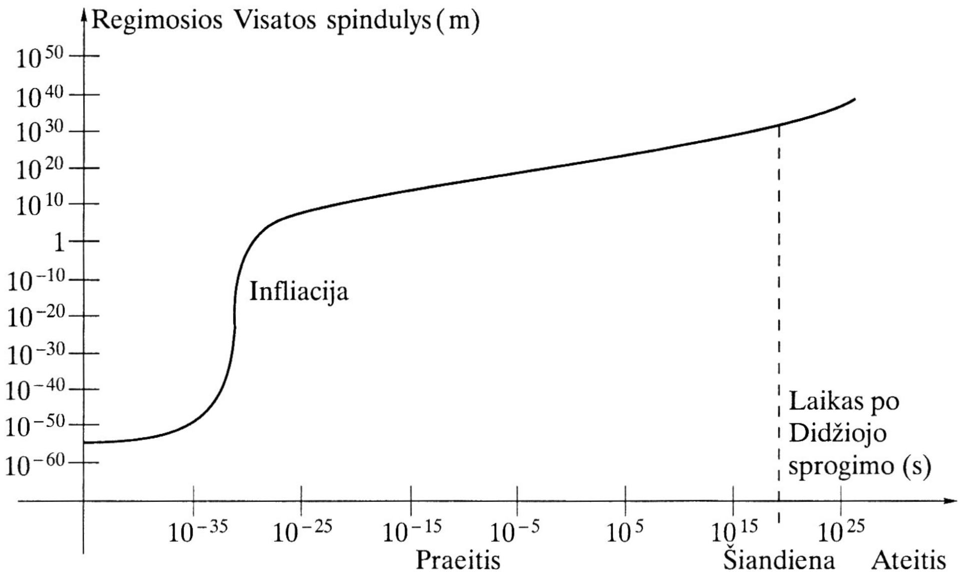
Jei Visata plečiasi, tai anksčiau visos galaktikos turėjo būti arčiau viena kitos. Todėl jei atsuktume atgal kurių nors poros galaktikų laiką, pasiektume tokį momentą, kai tos dvi galaktikos, taip sakant, „susilietų“. Pasirodo, kad šis momentas nepriklauso nuo to, kokias imsime galaktikas. Daug kas liudija, kad kažkada tolimoje praeityje visos galaktikos „susiliejusios“ buvo vienu metu. Tuomet reikia įsivaizduoti tokią sunkiai suvokiamą situaciją: medžiagos tankis Visatoje neapsakomai didelis, ir tam tikru momentu įvyksta milžiniškas sprogimas – vienu metu visoje Visatoje. Štai šis priešistorinis sprogimas ir yra Visatos plėtimosi priežastis.

O kada tiksliai yra buvęs tas Visatos sukūrimo momentas, priklauso nuo to, kaip per šį laiką erdvė plėtėsi. Nesunku suskaičiuoti, jei per visą šį laiką erdvė plėtėsi tuo pačiu greičiu. Tokio skaičiavimo principas išdėstytas pilkajame puslapyje „Ryšys tarp šviesos raudonojo poslinkio ir greičio“. Čia tik reikia išmatuoti nuotolį iki tolimos galaktikos ir raudonąjį poslinkį. Pakankamai tiksliai išmatuoti raudonąjį poslinkį nesunku, bet užtat nuotolį įvertinti tegalime tik apytiksliai, nors tai darome vis tiksliau ir tiksliau. Tarę, kad Visata plėtėsi pastoviu greičiu, gauname, kad Visatos amžius – apie 20 milijardų metų.

1114 1115

Būtų pernelyg paprasta tarti, kad erdvė visą laiką plėtėsi tuo pačiu greičiu, ir iš pradžių manyta, kad Visatos amžius bus padidintas – dėl to, kad, esą, plėtimąsi iš tikrųjų stabdo visuotinės traukos jėgos, ir todėl šiandien erdvė besiplečianti lėčiau nei anksčiau.

Vėliau (9-ajame dešimtmetyje) suvokta, kad pirmosiomis mikrosekundėmis Visata bus veikiausiai patyrusi „infliacijos“ fazę, kai plėtimasis vykęs griūtiškai. Per šį trumpą laiko tarpą erdvė plėtėsi eksponentiškai ir todėl, augdama griūtiškai, bus spėjusi padvigubėti milijardus kartų. Jei visa tai teisinga, tai Visata yra ne tik didelė, bet tiesiog nesuvokiamai didelė. Toliausiai įsiskverbti žvilgsniu į Visatą galime tikėtis iki 15–20 milijardų šviesmečių (iki pat pasaulio sukūrimo!), bet regimoji Visata – tai tik nepaprastai maža dalis visos Visatos. Regimoji Visata bus prasidėjusi kaip mažas visos Visatos burbuliukas, per infliaciją milžiniškai išaugęs ir tapęs mūsų regimąja Visata, t. y. ta Visatos dalimi, kurią patiriame žvalgydamiesi aplinkui. O su likusiąja Visata mes neturime jokio ryšio. Jei iš tų tolimų sričių mūsų nepasiekia net šviesa, tai ir niekas nepasieks.



Prieš kelis šimtus metų manėme, kad Visatos centras – Žemė, ir kad Saulės sistema užima daugmaž visą Visatą. Po to centru tapo Saulė, dar po to – Paukščių Takas. Šiandien žinome, kad Saulė yra tik viena iš milijardų žvaigždžių Paukščių Take, kuris tėra tik viena iš milijardų galaktikų regimoje Visatoje, kuri veikiausiai yra tik viena iš milijardų vietinių Visatų, drauge sudarančių visą Visatą, kurios dydį sunku įsivaizduoti.

Užduotys

1 skyriaus užduotys

101.

a) Raskite 678 litų sumos 23%.

b) Kiek procentų 2156 Lt sumos sudaro 801 litas?

c) Kam lygi visa suma, jei jos 15% yra 365 Lt 25 ct?

102.

a) Prekė, kainavusi 573 Lt, dabar parduodama su 20% nuolaida. Kokia dabartinė prekės pardavimo kaina?

b) Sumažinus kainą 30%, prekė parduodama už 278 Lt 95 ct. Kokia buvo pradinė prekės kaina?

c) Prekės, įkainotos 68 Lt 30 ct, kaina padidinama 6%. Raskite naująją prekės kainą.

d) Pernai prekę buvo galima nupirkti už 2450 Lt, o šiemet – už 2200 Lt. Keliais procentais atpigo prekė?

e) Kiek procentų prekės kainos (su pridėtinės vertės mokesčiu) sudaro pridėtinės vertės mokestis?

103. Be PVM prekė kainavo 2815 Lt. Mokant grynais parduotuvė daro 8% nuolaidą. Ar pirkėjui naudingiau reikalauti, kad nuolaida būtų skaičiuojama dar nepridėjus PVM, ar po to, kai PVM bus pridėtas?

104. Indėlio, kurio suma 800 Lt, palūkanų norma 6 metų laikotarpiu kinta šitaip: pirmųjų dvejų metų palūkanų norma lygi 7%, dvejų paskesnių – 6%, paskutinių dvejų – 7,5%.

a) Apskaičiuokite galutinę indėlio sumą po 6 metų.

b) Raskite vidutines šio 6 metų laikotarpio metines palūkanas.

105. Žmogaus fizinę būklę galima įvertinti tokiu paprastu būdu: žmogus bėga 2000 metrų; fiksuojamas laikas, ir fizinės būklės rodiklis k randamas pagal formulę $k = \frac{420}{t}$, čia t yra 2000 m bėgimui sugaištas laikas (minutėmis).

Bėgikas pirmajam testui sugaišo 12,5 min. Apskaičiuokite jo fizinės būklės rodiklį. Atsakymą suapvalinkite iki vienetų.

Tris mėnesius treniruojantis šis rodiklis didėjo. Po pirmojo treniruočių mėnesio jis padidėjo 20%. Po kitų dviejų mėnesių jis padidėjo dar 10%, dar po trijų mėnesių – tik 5%.

a) Raskite, kiek laiko bėgikas sugaišdavo 2000 m distancijai įveikti po 3 mėnesių.

b) Raskite fizinės būklės rodiklį po trečio mėnesio.

c) Keliais procentais šis rodiklis padidėjo per tris treniruočių mėnesius?

d) Keliais procentais pagerintas 2000 m bėgimo laikas per tris treniruočių mėnesius?

106. Numatykite, kokio dydžio bus 100 Lt indėlis po 5 metų, jei:

a) metinės palūkanos yra 12%;

b) pusės metų palūkanos yra 6%;

c) vieno mėnesio palūkanos yra 1%.

107.

a) Indėlis banke per metus padidėja 7,5%. Po 15 metų norėtume turėti sąskaitoje 25 000 Lt. Kokią pinigų sumą dabar turėtume įnešti?

b) Banko reklamoje parašyta, kad per 6 metus suma nuo 5000 Lt padidėja iki 8000 Lt. Kokia yra metinių palūkanų norma?

108.

a) Perkant išsimokėtinai radiotechnikos prekių parduotuvė reikalauja 2,2% mėnesinių palūkanų. Kokio dydžio metines palūkanas tai atitinka?

b) Bankas siūlo paskolą su 17% metinių palūkanų. Kokias tai atitinka mėnesines palūkanas?

109. Kasmet į vaikų taupomąją sąskaitą įnešama po 1000 Lt. Iš viso taip įmokėta 14 000 Lt. Koks yra šio laikotarpio taupos koeficientas, jei metinių palūkanų norma lygi 8%? Kokia suma bus sąskaitoje tuoj po paskutinio įnašo?

Po šio paskutinio įnašo 6 metus sąskaita nebuvo liečiama. Palūkanų norma taip pat nesikeitė. Kokiu koeficientu padidėjo indėlis? Kiek pinigų buvo sąskaitoje po 6 metų?

110. Pirmos klasės gimnazistė, ketindama pakeliauti būdama trečiojoje klasėje, nori sutaupyti 2500 Lt. Kiekvieną mėnesį ji įneša į sąskaitą tą pačią pinigų sumą: mėnesinių palūkanų norma lygi 0,25%. Iš viso ji planuoja įmokėti 18 įnašų.

a) Koks yra šio laikotarpio taupos koeficientas?

b) Kokią sumą jai reikia įmokėti kas mėnesį, kad pasiektų savo tikslą?

111. Gimnazistas paėmė paskolą nebenaujam automobiliui pirkti. Paskolą reikia išsimokėti per ketverius metus, kas mėnesį grąžinant po 500 Lt. Mėnesinių palūkanų norma yra 2%.

a) Koks šio laikotarpio skolos koeficientas?

b) Kiek kainuos automobilis sumokėjus visas išmokas ir palūkanas?

112. Paskola būstui įsigyti yra 40 000 Lt. Paskola išsimokama kas pusmetį per 8 metus, su pusmečio palūkanų norma 6,5%.

a) Koks viso laikotarpio skolos koeficientas?

b) Kiek iš viso pinigų reikės sumokėti grąžinant paskolą?

113. 3000 Lt tolygaus išsimokėjimo paskola turi būti grąžinta per 3 metus su 5% pusmetinėmis palūkanomis mokant vienodas 591,05 Lt įmokas kas pusmetį. Užpildykite paskolos grąžinimo plano lentelę:

Laiko tarpsnis (pusmetis)	Skolos likutis (Lt)	Palūkanos (Lt)	Įmoka (Lt)	Grąžinimo suma (Lt)
1	3000		591,05	
2			591,05	
3			591,05	
4			591,05	
5			591,05	
6		28,15	591,05	
7	0			
Iš viso:	–			

Pastaba. 114–116 užduotims spręsti reikalingas languotas popierius.

114. Nubraižykite languotame popieriuje tolygaus išsimokėjimo paskolos grąžinimo lentelę esant tokiems pagrindiniams duomenims:

pradinė skola – 5000 Lt; palūkanų norma – 0,08; pastovi įmoka – 1200 Lt.

a) Sudarykite skiltis dešimčiai laiko tarpsnių su tokiomis skilčių antraštėmis:

Laiko tarpsnis; Skolos likutis; Palūkanos; Įmoka; Paskolos grąžinimo suma.

Prisiminkite lentelės skaičiavimui reikalingas formules:

Palūkanos = palūkanų norma × skolos likutis;

Paskolos grąžinimo suma = įmoka − palūkanos;

Naujoji skola = sena likusioji skola − paskolos grąžinimo suma.

b) Naudodamiesi užpildyta lentele, apskaičiuokite visą šios paskolos įmoką.

c) Nubraižykite grafiką, atspindintį, kaip keičiasi paskolos grąžinimo suma ir palūkanos, keičiantis terminams. (Pravartu nubraižyti stulpelinę diagramą, kurioje palūkanų stulpelis būtų nubrėžtas virš paskolos grąžinimo sumos stulpelio.)
Užrašykite diagramos antraštę.

d) Kas pasikeistų, jei pinigų suma būtų 15 000 Lt, palūkanų norma 12%, o pastovi įmoka – 2500 Lt?

Pagal uždavinio Nr. 114 klausimus ir užduotis išspręskite uždavinį *išmokų paskolai.*

115. Pagrindiniai duomenys tokie:

pradinė skola – 5000 Lt; palūkanų norma – 0,08; pastovi įmoka – 1250 Lt.

Skaičiavimo formulės:

Palūkanos = palūkanų norma × skolos likutis;

Įmoka = palūkanos + paskolos grąžinimo suma;

Naujoji skola = sena likusioji skola − paskolos grąžinimo suma.

116. Tiek tolygaus išsimokėjimo paskola, tiek išmokų paskola turi savo privalumų ir trūkumų. Kartais geriausia derinti abi paskolų rūšis. Taip daroma mišrios paskolos atveju, kai dalis pagrindinės skolos grąžinama kaip tolygaus išsimokėjimo paskola, kita dalis – kaip išmokų paskola.

Skola bus išsimokama kaip mišrioji paskola: 40% paskolos kaip tolygaus išsimokėjimo paskola su 600 Lt įmokomis, o likę 60% – kaip išmokų paskola su pastovia grąžinimo suma 600 Lt.

Sudarykite lentelę su tais pačiais pagrindiniais duomenimis kaip ankstesnėje užduotyje, t. y. pradinė skola – 5000 Lt; palūkanų norma – 0,08.

2 skyriaus užduotys

201. Užpildykite tiesinio augimo modelių lenteles ir sudarykite augimo lygtis:

a)

x	...	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	-8					7	...

b)

x	...	0	1	2	3	4	5	...
y	...			5		1		...

c)

x	...	0	2	4	6	8	10	...
y	...			8		14		...

202. Važiuojant taksi, važiavimo kaina priklauso nuo atstumo. Penkių skirtingų kelionių atstumai (km) ir kainos (Lt) surašytos lentelėje:

Nuvažiuotas kelias (km)	4	8	12	16	20
Kaina (Lt)	11	19	27	35	43

a) Pagrįskite teiginį, kad nagrinėjamoji priklausomybė yra tiesinė.
b) Koks taksi įsėdimo mokestis?
c) Kiek kainuoja nuvažiuoti taksi vieną kilometrą?
d) Kiek galima nuvažiuoti už 23 Lt? Kiek kainuoja 22 km kelionė?
e) Raskite kainos kaip nuvažiuoto atstumo funkcijos lygtį.

203. Apskaičiavus tankį (tūrio ir masės santykį), galima atpažinti nežinomą skystį. Ant elektroninių svarstyklių pastatomas matavimo cilindras ir į jį po truputį pilamas nežinomas skystis. Sąryšį tarp skysčio tūrio ir cilindro su skysčiu masės iliustruoja tokia lentelė:

Tūris V (mℓ)	10	20	30	40	50	60
Masė m (g)	130,7	138,6	146,5	154,4	162,3	170,2

a) Pagrįskite teiginį, kad priklausomybė tarp tūrio ir masės yra tiesinė.
b) Kokia krypties koeficiento a reikšmė ir kokia jo fizikinė prasmė?
c) Kiek sveria tuščias matavimo cilindras?
d) Užrašykite priklausomybės tarp tūrio ir masės lygtį.
e) Nežinomam skysčiui atpažinti pasinaudokite šia lentele:

Skystis	Eteris	Etanolis	Benzolas	Vanduo	Glicerolis	Sieros rūgštis
Tankis	0,715	0,791	0,878	1,000	1,264	1,841

204. Slėgis inde tiesiškai priklauso nuo temperatūros. Inde išmatuotos tokios temperatūros ir atitinkamo slėgio reikšmės:

Temperatūra (°C)	20	80
Slėgis (atm)	2,00	2,41

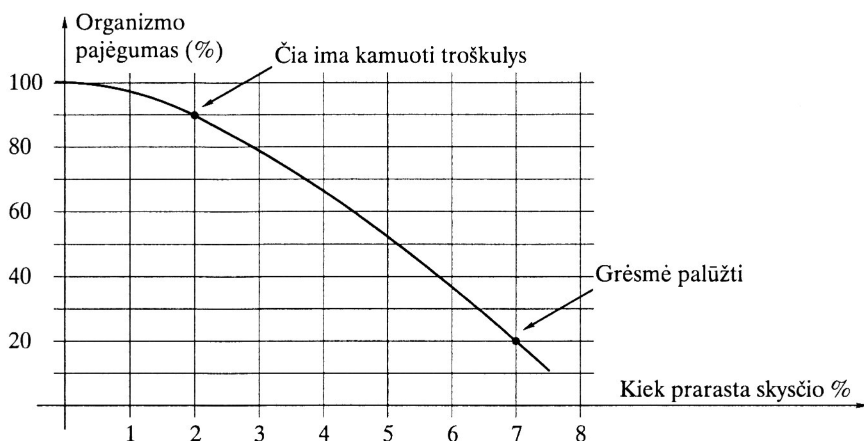
a) Užrašykite šios tiesinės priklausomybės lygtį.
b) Nustatykite, kokioje temperatūroje slėgis lygus 0 atmosferų.
c) Kokia šios temperatūros prasmė?

205. Tiesinė interpoliacija. Norėdamas išsiaiškinti, kurioje dangaus skliauto vietoje Marso planeta bus 1995 lapkričio 18 dieną, moksleivis pasinaudojo planetų lentele. Lentelė rodo, kad lapkričio 1 d. Marso padėtis nusakoma 248 laipsniais, o gruodžio 1 d. – 270 laipsnių.

x (dienos)	1	18	31
y (laipsniai)	248	?	270

a) Norėdami rasti Marso padėtį lapkričio 18 d., tarsime, kad sąryšis yra tiesinis. Užrašykite šio tiesinio sąryšio lygtį.
b) Nustatykite Marso padėtį lapkričio 18 d.

206. Kai sportininko fiziniai krūviai dideli, pavyzdžiui, bėgant labai ilgus nuotolius, prakaituodamas jis netenka daug skysčių. Tada ima kamuoti troškulys ir sumažėja organizmo pajėgumas. Netekti labai daug skysčių yra tiesiog pavojinga gyvybei. Grafikas rodo sąryšį tarp skysčių kiekio, kurio neteko organizmas (matuojant kūno masės pokytį procentais), ir organizmo pajėgumo (matuojant procentais nuo maksimalaus pajėgumo).



a) Bėgikas, kuris prieš bėgdamas svėrė 55 kg, nubėgęs distanciją neteko 2 kg skysčių. Koks yra jo pajėgumas po bėgimo?
b) Bėgiko masė prieš bėgant – 70 kg. Kiek skysčių neteko bėgikas, jeigu jo pajėgumas sumažėjo 20 procentų?
c) Grafike matyti, kad prarandant nuo 2 iki 7 procentų skysčių, organizmo pajėgumas mažėja beveik tiesiškai. Užrašykite šio tiesinio sąryšio lygtį.

207. Baikite pildyti šių eksponentinio augimo modelių lenteles ir užrašykite atitinkamas lygtis:

a)

x	...	0	1	2	3	4	5	...
y	...			12		48		...

b)

x	...	0	1	2	3	4	5	...
y	...		8		2			...

c)

x	...	0	2	4	6	8	10	...
y	...		18	162				...

208. Gydomam ligoninėje pacientui į kraują suleidžiama penicilino. Po to kas ketvirtis valandos imamas kraujo mėginys ir tiriamas penicilino kiekis kraujuje. Rezultatai surašyti lentelėje:

Laikas (ketvirčiai valandos)	1	2	3	4	5	6
Penicilinas (mg/litre)	11,0	8,5	6,5	5,0	3,9	3,0

a) Pagrįskite, kad augimas yra eksponentinis.

b) Koks buvo penicilino kiekis kraujuje 15 minučių po injekcijos? Kiek penicilino įšvirkšta pacientui, jei jo organizme yra 6 litrai kraujo?

c) Koks buvo penicilino kiekis po 2 valandų? Kiek reikės laukti, kol penicilino kiekis taps mažesnis nei 1 mg/litre?

d) Keliais procentais penicilino kiekis sumažėja per valandą?

e) Užrašykite šio eksponentinio sąryšio lygtį.

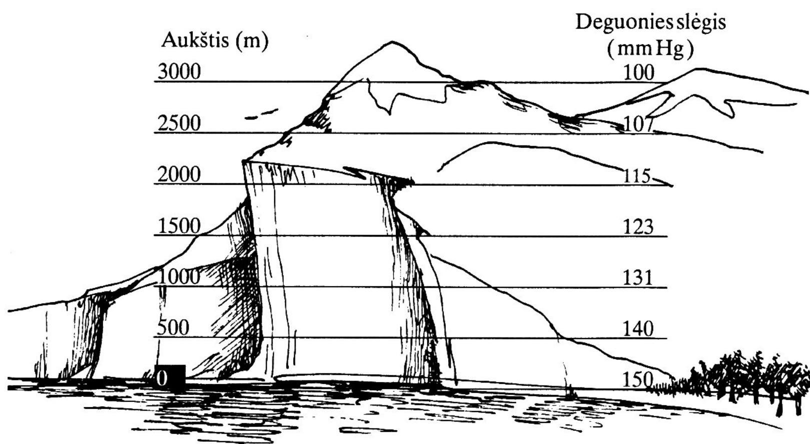
209. Sportuojant kalnuose, gali kilti problemų dėl oro retumo, nes kylant aukštyn, mažėja deguonies. Ore esantį deguonies kiekį galima nusakyti deguonies slėgiu. Diagramoje pavaizduotas sąryšis tarp aukščio virš jūros lygio (metrais) ir deguonies slėgio (mm Hg).

a) Parodykite, kad deguonies slėgis tam tikru tikslumu yra mažėjanti eksponentinė aukščio virš jūros lygio funkcija.

b) Parašykite šio eksponentinio sąryšio lygtį.

c) Nustatykite deguonies slėgį 2350 metrų aukštyje virš jūros lygio.

d) Nustatykite, kokiame aukštyje deguonies slėgis perpus mažesnis nei ties jūros lygiu.



210.

> **Temperatūros reguliavimas ir miegas**
> *Ropliai dažnai vadinami šaltakraujais, tačiau daugumos roplių, kai jie aktyvūs, kūno temperatūra esti aukšta. Pavyzdžiui, atkutusio mūsų miškų driežo kūno temperatūra pakyla iki* 20–32 °C. *Žemesnėse temperatūrose organizmo fiziologiniai procesai sulėtėja, gyvūnų judesiai tampa vangesni. Tai aiškiai matyti palyginus „šaltą" ir „šiltą" roplį. Angis, esant* 0 °C *temperatūrai, vos juda, o kai temperatūra* 30 °C, *šliaužia* 10–12 *m per minutę greičiu. Galima teigti, kad temperatūrai pakilus* 10 *laipsnių, aktyvumas padvigubėja.*

Remdamiesi šia žurnalo ištrauka, užpildykite lentelę:

Angies kūno temperatūra (°C)	0	10	20	30	40
Angies aktyvumas (m/min.)				11	

a) Ištraukoje sakoma, kad 0 °C temperatūroje angis vos juda. Koks jos aktyvumas matuojant metrais per minutę?

b) Parašykite angies aktyvumo kaip jos kūno temperatūros funkcijos lygtį.

c) Raskite angies aktyvumą, kai jos kūno temperatūra 23 °C.

211. Eksperimentas: Atšokantis kamuoliukas

Jeigu paleisite iš tam tikro aukščio (kritimo aukščio) kristi ant standaus kieto pagrindo kamuoliuką, tai atšokęs jis pakils į šiek tiek mažesnį aukštį (atšokimo aukštį). Šio eksperimento tikslas – ištirti sąryšį tarp kritimo aukščio ir atšokimo aukščio.

I. *Kaip aukštai atšoks kamuoliukas?*

Eksperimentui reikia turėti kamuoliuką ir ruletę ar ilgą liniuotę su padalomis.

Leiskite kamuoliukui kristi iš įvairaus aukščio ir kiekvienu atveju matuokite atšokimo aukštį. Rezultatus užsirašykite ir, sudarę lentelę bei nubraižę grafiką patyrinėkite, ar sąryšio tarp kritimo ir atšokimo aukščio negalima užrašyti paprasta lygtimi. Į lentelę bei grafiką galite įtraukti ir tašką (0, 0), nes kai kritimo aukštis 0, atšokimo aukštis taip pat 0. Koks čia augimas?

Atradę sąryšį, apskaičiuokite teorinius atšokimo aukščius ir surašę juos į lentelę, palyginkite su eksperimentiškai gautų aukščių lentele.

II. *Kaip kamuoliukas šokinės?*

Tarkime, kad leidžiame kamuoliukui laisvai kristi iš 2 m aukščio ir šokinėti. Pabandykite pasinaudodami a) punkto rezultatais numatyti, į kokį aukštį kamuoliukas atšoks pirmuosius penkis kartus. Sudarykite atšokimo eilės numerio n ir atšokimo aukščio h, t. y. aukščio, į kurį pakils kamuoliukas, atšokęs n-ąjį kartą, lentelę. Pabandykite užrašyti sąryšį tarp n ir h tiesine lygtimi.

Kokio pobūdžio čia augimas?

Ar pagal jūsų modelį kamuoliukas po tam tikro laiko paliaus šokinėti? Ar tai atitinka praktiškai stebimus rezultatus?

III. *Kiek ilgai kamuoliukas judės?*

Kiek ilgai truks kamuoliuko judėjimas, jei nukritus iš 2 metrų aukščio, leisime jam atšokti vieną kartą? (Patikslinkite, ką turite galvoje, sakydami „atšokti vieną kartą"!)

Kiek ilgai truks kamuoliuko judėjimas, kol jis atšoks penkis kartus?

Kiek ilgai truks kamuoliuko judėjimas, jeigu jo nestabdysime ir leisime šokinėti?

212. Eksperimentas: Kaip aušta puodelis arbatos

Šiam bandymui reikės termometro (0–100 °C) ir puodelio karštos arbatos.

a) Išmatuokite kambario temperatūrą. Užplikykite puodelį arbatos ir matuokite arbatos temperatūrą kas minutę dvidešimt kartų.

b) Sudarykite lentelę arbatos temperatūrai, kaip laiko funkcijai.

c) Kokia bus arbatos temperatūra, jeigu paliksime puodelį ir neliesime jo daug valandų? Ar galima arbatos temperatūros kitimą aprašyti tiesiniu modeliu? Eksponentinio augimo modeliu?

d) Sudarykite kitą lentelę, kuri rodytų arbatos temperatūros ir kambario temperatūros skirtumą.

e) Ar galima šios lentelės duomenis aprašyti tiesine funkcija? Eksponentine?

f) Pabandykite pagal šio bandymo duomenis suformuluoti dėsningumą, kaip aušta puodelis arbatos.

213. Kaip minėta tekste, Žemės rutulio gyventojų skaičius nuo 1980 iki 1985 metų išaugo nuo 4,4 iki 4,8 milijardų. Nustatykite metinį augimo koeficientą ir metinį prieaugį procentais.

Tarkime, kad Žemės gyventojų skaičius visuomet didėjo tokiu pat metiniu prieaugiu. Kiek metų reikėtų keliauti atgal, kad grįžtume prie Adomo ir Ievos? (Pamėginkite apskaičiuoti skaičiuokliu!) Kurie tai bus metai?

214.

Tylusis sprogimas

„Gyventojų skaičius, kas metai padidėjantis vienu procentu, nepatrigubės net per šimtmetį, o išaugantis trimis procentais, per šimtmetį padidės devyniolika kartų", – rašoma ką tik išėjusioje knygoje. JT konferenciją gyventojų klausimu, įvyksiančią rugpjūčio mėnesį Meksikoje, Žemė pasitiks turėdama 4,7 milijardų žmonių. Nuo praeitos konferencijos Bukarešte, Rumunijoje, per dešimtį metų Žemėje žmonių padaugėjo 20 procentų. Jeigu tokia tendencija išliks, tai 2095 metais Žemėje gyvens 10,2 milijardo žmonių. Manoma, kad naują tūkstantmetį pradėsime turėdami 6 milijardus – dvigubai daugiau nei 1960 metais.

Information, 1984 liepos 7–8 d.

Panagrinėkite žinutę iš laikraščio ir pakomentuokite tokius jos teiginius:

a) Gyventojų skaičius, kasmet išaugantis 1 procentu, per 100 metų nepatrigubės.

b) Gyventojų skaičius, kasmet išaugantis 3 procentais, per 100 metų padidės devyniolika kartų.

c) Jeigu Žemės gyventojų skaičius ir toliau kas dešimtmetį didės 20 procentų, tai žmonių Žemėje nuo 4,7 milijardų 1984 metais padaugės iki 10,2 milijardų 2095 metais.

d) Jeigu Žemės gyventojų skaičius ir toliau kas dešimtmetį didės 20 procentų, tai žmonių Žemėje nuo 4,7 milijardų 1984 metais padaugės iki 6 milijardų 2000 metais.

215.

Per penkiasdešimt metų Žemės gyventojų skaičius padvigubės ir viršys 10 milijardų, o 90 procentų naujųjų pasaulio piliečių bus trečiojo pasaulio šalyse. Taip perspėjo Stokholmo konferencijoje „Žmonių gimstamumo reguliavimas" Karlas Varenas (*Carl Wahren*), Tarptautinės šeimos planavimo draugijos generalinis sekretorius.

Jis prognozuoja, kad metinis pasaulio gyventojų prieaugis nuo dabartinio 75 mln. 2000 metais šoktelės iki 95 mln.

Manoma, kad dabar Žemėje gyvena apie 4,6 mlrd. žmonių.

Sakykime, kad gyventojų skaičius auga eksponentiškai, ir kad po 50 metų žmonių bus 10,1 milijardo – taigi padaugės daugiau nei dvigubai. Nustatykite metinį prieaugį procentais (dviejų dalių po kablelio tikslumu).

Pagrįskite, kad minėtieji 75 ir 95 milijonų prieaugiai (1983 ir 2000 metais) neblogai atitinka eksponentinio augimo modelį.



216. Brolių Grimų pasakoje „Jonas ir pupa" kalbama apie labai sparčiai augantį stebuklingą augalą. Iš pradžių augalo aukštis yra 3 cm. Tarkime, kad jo aukštis per parą padvigubėja.

a) Kokį aukštį stebuklingasis augalas pasieks po savaitės?

b) Kokio aukščio jis bus po 14 dienų?

c) Kokio aukščio jis bus po mėnesio?

d) Kada jis pasieks Mėnulį? (Atstumas nuo Žemės iki Mėnulio yra 384 000 km.) Kada jis bus pusiaukelėje tarp Žemės ir Mėnulio?

217. Senas indų padavimas byloja, kad karalius norėjo apdovanoti išminčių, išradusį šachmatus. Išminčiaus pageidavimas skambėjo kukliai. Jis norėjo už pirmąjį šachmatų lentos langelį gauti vieną kviečio grūdą, už antrąjį – du, už trečiąjį – keturis ir t. t., už kiekvieną kitą langelį dvigubai daugiau nei už pirmesnįjį.

a) Kiek grūdų išminčius užsiprašė už paskutinį langelį?

b) Kiek grūdų išminčius užsiprašė iš viso?

c) Vienas grūdas sveria apie 0,04 g. Kiek sveria visas išminčiaus užsiprašytas kviečių kiekis?

d) Palyginkite šį skaičių su metiniu kviečių derliumi pasaulyje, kuris 1990 metais buvo apie 300 milijonų tonų.

218. Apskaičiuokite daugiklio a ir santykinio prieaugio p reikšmes, atitinkančias nurodytas dvigubėjimo periodo T_2 reikšmes, užpildykite lentelę:

T_2	5	7	10	14	20	28	35	70
a								
p								

Pabandykite suformuluoti paprastą sąryšio tarp T_2 ir p taisyklę „didelių" T atveju.

219. Baikite pildyti eksponentinių funkcijų lenteles ir nubrėžkite funkcijų grafikus pusiau logaritminėje kooordinačių sistemoje:

a)

x	0	2	4	6	8	10
y			10	25		

b)

x	0	2	4	6	8	10
y		10	25			

c)

x	0	2	4	6	8	10
$y = 1{,}6 \cdot 2^x$						

220. Atidėkite lentelėse nurodytus taškus stačiakampėje bei pusiau logaritminėje koordinačių sistemose ir pasakykite, kuri lentelė atitinka tiesinio, kuri eksponentinio augimo modelį (arba nė vieno iš jų).

a)

x	1,5	2,2	4,3	7,6
y	2,1	2,3	3,2	5,2

b)

x	1,5	2,2	4,3	7,6
y	2,1	2,6	3,1	5,2

c)

x	1,5	2,2	4,3	7,6
y	2,1	2,45	3,5	5,2

221. Lentelėje pateiktas Žemės gyventojų skaičius (milijonais) kai kuriais metais:

Metai	0	1000	1650	1750	1850	1950	1980	1990
Skaičius	150	350	550	725	1325	2500	4000	5000

a) Pavaizduokite duomenis pusiau logaritminėje kooordinačių sistemoje.
b) Ar galima augimą per tokį ilgą laiko tarpą aprašyti eksponentiškai?

222. I. Lietuvoje nuo 1991 metų pastebimas susirgimų tuberkulioze gausėjimas. Duomenys apie susirgusius aktyvia tuberkuliozės forma 1991–1997 metais pateikti lentelėje.

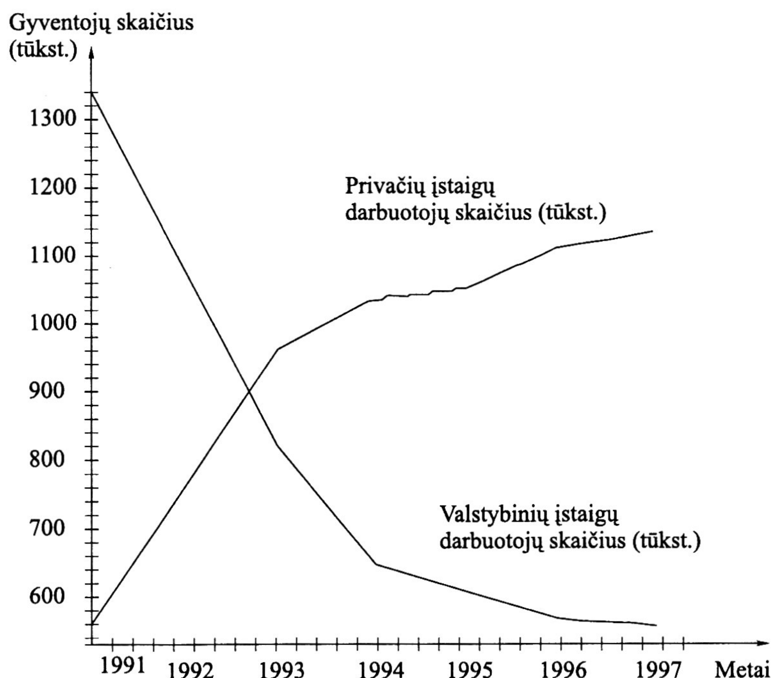
Metai	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
Susirgusių tuberkulioze skaičius	1287	1387	1628	2015	2116	2357	2627

Atidėkite lentelės skaičius pusiau logaritminėje koordinačių sistemoje (x ašies padalos vertė: 1 cm = 1 metai).

Parodykite, kad susirgusiųjų tuberkulioze gausėjimas nuo 1991 iki 1997 tam tikru tikslumu yra eksponentinis. Koks jo dvigubėjimo laikas? Užrašykite metinio susirgusių tuberkulioze skaičiaus, kaip metų funkcijos, lygtį.

Jei ši tendencija nepakistų, kiek žmonių susirgtų tuberkulioze 2000 metais? 2005 metais?

II. Žemiau pateikta diagrama rodo Lietuvos gyventojų užimtumo privačiose ir valstybinėse įstaigose raidą. Grafikų taškų y koordinatė reiškia gyventojų skaičių (tūkstančiais). Dirbančiųjų privačiose įstaigose daugėjo, o valstybinėse – mažėjo. Parodykite, kad tam tikru tikslumu dirbančiųjų skaičių valstybinėse įstaigose 1991–1994 metais galima aprašyti eksponentiškai.



	Gyventojų užimtumas (tūkst.)	
Metai	Privačiose įstaigose	Valstybinėse įstaigose
1991	564,7	1332,9
1992	766,6	1088,6
1993	963,4	814,8
1994	1029,9	645,1
1995	1043,6	600,0
1996	1104,4	554,6
1997	1124,0	545,2

223. Sakykime, kad vidutinis žmogus sveria 70 kg. Koks organizmo balastas atitinka toleruotinas sunkiųjų metalų dienos dozes?

224. Natūralioje aplinkoje esančio švino kiekį apibūdina tokia lentelė:

	Kasdienis suvartojimas	Švino kiekis	Absorbuojama dalis	Absorbuojamas švino kiekis
Maistas	1,4 kg	10 μg/kg	5%	0,7 μg
Vanduo	1,0 kg	0,5 μg/kg	5%	0,025 μg
Oras	20 m^3	0,0005 μg/m^3	40%	0,004 μg

a) Paaiškinkite, kaip gaunami skaičiai lentelės dešiniojoje skiltyje.

b) Kiek natūraliai aplinkoje esančio švino vidutiniškai absorbuojama per dieną?

c) Koks žmogaus, sveriančio 70 kg, organizmo balastas atitinka šį absorbuojamo švino kiekį?

d) Vidutinio žmogaus organizmo balaste švino buvo 1,4 mg. Koks švino kiekis būdavo absorbuojamas per dieną?

225. Švino tarša Danijoje buvo didžiausia apie 1940 m., kuomet vidutinio dano organizmo balastas buvo net apie 200 mg. Kiek būdavo absorbuojama per dieną? Ar 1940 m. buvo peržengtos toleruotinos dienos dozės?

226. Kasdieninė (beveik) neišvengiama kadmio dozė pasiskirsčiusi šitaip:

	Kasdienis suvartojimas	Kadmio kiekis	Absorbuojama dalis	Absorbuojamas kadmio kiekis
Maistas	1,4 kg	40 μg/kg	5%	2,8 μg
Vanduo	1,0 kg	10 μg/kg	5%	0,5 μg
Oras	20 m^3	0,005 $\mu g/m^3$	40%	0,04 μg
Rūkalai	20 vnt.	0,2 μg	40%	1,6 μg

a) Paaiškinkite, kaip gauti skaičiai lentelės dešiniojoje skiltyje.

b) Kiek kadmio vidutiniškai absorbuojama per dieną?

c) Koks vidutinio (70 kg) žmogaus organizmo balastas atitinka šį absorbuojamo kadmio kiekį?

227. Darbo vietoms nurodomos cheminių medžiagų ribinės reikšmės, t. y. didžiausi ore leistini medžiagų kiekiai. Ribinė (neorganinių junginių) švino reikšmė yra 0,1 mg/m^3.

a) Kiek švino teks organizmui absorbuoti darbe kas dieną, jei per parą įkvepiama 20 m^3 oro ir organizme lieka 40% tame ore esančio švino?

b) Kaip tokiu būdu rastoji reikšmė atitinka tekste pateiktą toleruotiną švino dienos dozę? Ribinė kadmio reikšmė yra 0,05 mg/m^3.

c) Kiek kadmio organizmas absorbuos darbe kas dieną, jei per parą įkvepiama 20 m^3 oro ir organizme lieka 40% tame ore esančio kadmio?

d) Kaip tokiu būdu rastoji reikšmė atitinka tekste pateiktą toleruotiną kadmio dienos dozę?

228. Studentas per ketverius savo studijų metus kasmet ėmė 5000 litų studijų paskolą. Metinės palūkanos – tiek studijų metais, tiek studijas baigus – buvo sutartos 12 procentų ir pradėtos skaičiuoti jau studijų metais.

a) Įsitikinkite, kad studentas, baigęs studijas, iš viso bankui bus skolingas 26 764 litus ir 24 centus.

b) Kiek mažiausiai jis turėtų įmokėti kasmet, kad įstengtų grąžinti šią paskolą?

c) Studentas nusprendė, kad šią paskolą grąžins kasmet įmokėdamas po 5000 Lt. Kokio dydžio yra kritinė skola? Per kiek metų studentas grąžins paskolą?

d) Kokią sumą iš viso jis sumokės bankui?

229. Dvyliktos klasės moksleivei sukako 18 metų. Ji gavo vairuotojo pažymėjimą, o dabar nori nusipirkti automobilį. Ji mano, kad galėtų kasmet sutaupyti automobiliui po 1600 litų.

Prekiautojai naudotais automobiliais siūlo pirkti automobilį išsimokėtinai per šešerius metus su 18 procentų metinių palūkanų. Už kokią sumą ji gali tokiomis sąlygomis pirkti automobilį?

230. Klasikinis laipsninės funkcijos pavyzdys – trečiasis Keplerio dėsnis, atspindintis sąryšį tarp planetos nuotolio nuo Saulės ir jos apskriejimo apie Saulę periodo. Vidutinį nuotolį nuo Saulės R matuodami astronominiais vienetais, o apskriejimo periodą T – metais, gauname:

Planeta	Merkurijus	Venera	Žemė	Marsas	Jupiteris	Saturnas
R	0,387	0,723	1,000	1,524	5,203	9,539
T	0,241	0,615	1,000	1,881	11,862	29,458

1 *astronominis vienetas = Žemės orbitos spindulys =* 150 *mln. km.*

a) Atidėkite logaritminėje kooordinačių sistemoje taškus, vaizduojančius vidutinio nuotolio R ir periodo T reikšmių poras. Parodykite, kad taškai išsidėsto maždaug vienoje tiesėje.
b) Išmatuokite krypties koeficientą a.
c) Užrašykite T kaip funkcijos nuo R lygtį.

3 skyriaus užduotys

301. Eksperimentas: Rodmenų statistika
Geigerio skaitikliu išmatuokite, pavyzdžiui, dvidešimt kartų po 10 sekundžių gama spindulių šaltinio skleidžiamą spinduliuotę. Atkreipkite dėmesį, kad kiekvieną kartą gausite skirtingą rezultatą. Taigi matavimo rodmuo yra atsitiktinis dydis.

a) Raskite dvidešimties matavimo rezultatų vidurkį m.
b) Dispersiją s galima gauti iš šio vidurkio ištraukus šaknį (žr. 195 p.), taigi $s = m$. Nustatykite normaliųjų ir išskirtinių verčių sritis.
c) Ar tarp jūsų dvidešimties matavimų rodmenų yra išskirtinių reikšmių?
d) Šiuose matavimuose neatsižvelgėme į neišvengiamą kitų aplinkos šaltinių įtaką. Norint įvertinti natūralią foninę spinduliuotę, reikia pašalinti γ spindulių šaltinį ir vėl matuoti dvidešimt kartų po 10 sekundžių.
Apskaičiuokite foninės spinduliuotės vidurkį.
e) Atėmę natūralią foninę spinduliuotę, raskite pakoreguotą γ šaltinio vidutinę aktyvumo vertę.

302. Eksperimentas: Sveika druska

a) Išmatuokite foninę spinduliuotę. Matavimo laikas yra 20 minučių. Dispersija randama iš gautosios vertės ištraukus šaknį (žr. 301 užduotį). Nustatykite natūralios foninės spinduliuotės *normaliąją* ir *išskirtinę* sritį.
b) Išmatuokite Geigerio skaitikliu (atsargiai nuėmę apsauginį plastiko gaubtelį) spinduliuotę 200 g paprasčiausios valgomosios druskos ($NaCl$)ploname celofaniniame maišelyje. Maišelį su druska reikia taip supresuoti, kad jis pasidarytų apie 1,5 cm storio. Matuokite 20 minučių.
c) Išmatuokite panašaus maišelio su 200 g kalio chlorido (KCl) spinduliuotę.
d) Kokiose srityse išsidėsto punktų b) ir c) matavimo rezultatai pagal a) punkte nustatytas ribas?

Atsakykite į klausimus:
ar NaCl radioaktyvus?
ar KCl radioaktyvus?
Kai kurie gamintojai siūlo vadinamąją „sveiką druską“, kur į paprastą valgomąją druską (NaCl) būna įmaišyta kalio chlorido (KCl).

Geigerio skaitiklis

Maišelis su druska

***SELTINAS* – JŪSŲ ŠEIMOS SVEIKATOS LABUI**

Kodėl mineralinė druska *Seltinas* yra sveikesnė ?

Dauguma žmonių vartoja per daug druskos, o druska paprastai susideda vien iš natrio chlorido, kurio didesnis kiekis organizmui nėra gerai.
1. Mineralinėje druskoje *Seltinas* yra 35 procentais mažiau natrio chliorido nei paprastoje druskoje.
2. *Seltine* yra kalio, kurio dėka organizmas dar mažiau įsisavins kenksmingo natrio. Kalis nepasižymi jokiu skoniu, ir *Seltino* skonis yra visiškai toks pat kaip ir paprastos druskos.
3. Be to, *Seltine* yra magnio, kuris organizmui yra labai svarbus elementas.

e) Tokiu pat būdu kaip ir punkte b) ištirkite 200 g sveikos druskos.
Ar sveika druska radioaktyvi?

f) Iš c) ir e) punktuose gautų matavimo rezultatų atimkite fono indėlį. Dviejų korekcinių rodmenų A_{sveik} ir A_{KCl} santykis $A_{\text{sveik}}/A_{\text{KCl}}$ turi būti toks pat kaip ir sveikoje druskoje esančio kalio kiekio santykis su gryname kalio chloride esančiu kalio kiekiu.
Apskaičiuokite šį santykį.
Palyginkite su gamintojo deklaracija.

303. Gamtoje aptinkamas jodas 100 procentų sudarytas iš izotopo ^{127}I. Apskaičiuokite, kiek branduolių yra 500 mg jodo.

304. Gamtoje aptinkamo kalio vidutinė branduolio masė yra 39,09 a.m.v. Paverskite šį skaičių kilogramais ir apskaičiuokite, kiek kalio branduolių yra 100 gramų gamtinio kalio. Apskaičiuokite, kokios šio skaičiaus dalys tenka izotopams ^{39}K, ^{40}K ir ^{41}K (žr. 61 p.). Kiek procentų kalio masės yra radioaktyvi?

305. Gamtoje aptinkamos anglies (vidutinė atominė masė 12,008 a.m.v.) nedidelė dalis (1,11 procento) yra izotopas ^{13}C, o didžioji dalis (98,89 procento) – ^{12}C. Izotopo ^{14}C (atominė masė 14,00 a.m.v.) esti labai nedaug – vos $1{,}25 \cdot 10^{-10}$ procento.

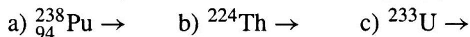
a) Įrodykite, kad 800 milijardų natūraliai gamtoje aptinkamos anglies branduolių bus pasiskirstę kaip pateikta šioje lentelėje:

Branduolys	^{12}C	^{13}C	^{14}C	Iš viso
Branduolių skaičius (milijardais)	791	9	1	800

b) Apskaičiuokite bendrą 800 milijardų branduolių masę atominiais masės vienetais.

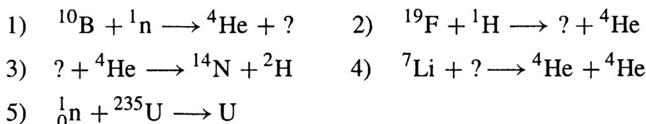
c) Kokią visos šios masės dalį procentais sudaro to vieno ^{14}C branduolio masė?

306. Užrašykite šių α skilimo reakcijų lygtis:



a) $^{238}_{94}\mathrm{Pu} \rightarrow$ b) $^{224}\mathrm{Th} \rightarrow$ c) $^{233}\mathrm{U} \rightarrow$

307. Baikite rašyti šių penkių reakcijų lygtis:

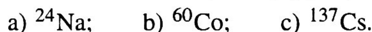


1) $^{10}\mathrm{B} + {}^{1}\mathrm{n} \longrightarrow {}^{4}\mathrm{He} + ?$ 2) $^{19}\mathrm{F} + {}^{1}\mathrm{H} \longrightarrow ? + {}^{4}\mathrm{He}$

3) $? + {}^{4}\mathrm{He} \longrightarrow {}^{14}\mathrm{N} + {}^{2}\mathrm{H}$ 4) $^{7}\mathrm{Li} + ? \longrightarrow {}^{4}\mathrm{He} + {}^{4}\mathrm{He}$

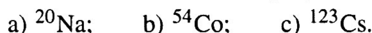
5) $^{1}_{0}\mathrm{n} + {}^{235}\mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{U}$

308. Kiekvienas šių izotopų yra β^- radioaktyvus. Užrašykite skilimo reakcijų lygtis:



a) $^{24}\mathrm{Na}$; b) $^{60}\mathrm{Co}$; c) $^{137}\mathrm{Cs}$.

309. Kiekvienas šių izotopų yra β^+ radioaktyvus. Užrašykite skilimo reakcijų lygtis:

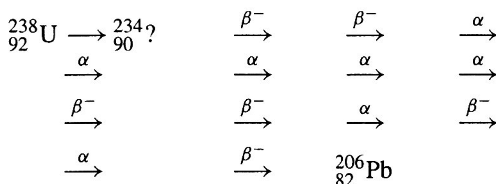


a) $^{20}\mathrm{Na}$; b) $^{54}\mathrm{Co}$; c) $^{123}\mathrm{Cs}$.

310. Kokių radioaktyviųjų branduolių yra mokykliniuose radioaktyviuosiuose šaltiniuose? Pasižymėkite, kokio tipo skilimas vyksta kiekviename šaltinyje ir užrašykite reakcijų lygtis.

311. Gamtoje esama trijų vadinamųjų radioaktyviųjų šeimų. Viena iš jų, urano šeima, prasideda urano izotopu $^{238}\mathrm{U}$, kuris yra α radioaktyvus. Dukterinis šio pirmojo skilimo branduolys irgi būna radioaktyvus, ir taip toliau, kol priartėjame prie švino izotopo $^{206}\mathrm{Pb}$, kuris yra stabilus.

Raskite urano šeimos narius:



$$^{238}_{92}\mathrm{U} \longrightarrow {}^{234}_{90}? \xrightarrow{\beta^-} \xrightarrow{\beta^-} \xrightarrow{\alpha}$$
$$\xrightarrow{\alpha} \xrightarrow{\alpha} \xrightarrow{\alpha} \xrightarrow{\alpha}$$
$$\xrightarrow{\beta^-} \xrightarrow{\beta^-} \xrightarrow{\alpha} \xrightarrow{\beta^-}$$
$$\xrightarrow{\alpha} \xrightarrow{\beta^-} {}^{206}_{82}\mathrm{Pb}$$

312. Į paciento kraujo mėginį (5,0 mℓ) įleidžiama radioaktyviųjų $^{51}\mathrm{Cr}$ branduolių. Geigerio skaitikliu išmatavus tų 5 mℓ kraujo skleidžiamą spinduliuotę, gaunamas rezultatas 60 100 signalų per minutę. Tada tas „pažymėtas“ kraujas sušvirkščiamas pacientui.

Vėl paėmus kraujo mėginį (5,0 mℓ), išmatuotas 82,7 signalų per minutę radioaktyvumas. Kiek kraujo turi pacientas?

313. Gamtoje yra trys radioaktyvūs cheminiai elementai, pasižymintys itin ilgu skilimo pusamžiu: $^{235}\mathrm{U}$, $^{238}\mathrm{U}$ ir $^{232}\mathrm{Th}$. Visų jų skilimo pusamžis yra tokios pat eilės kaip ir Saulės sistemos amžius (4,6 milijardo metų). Todėl jų dar ir išliko! Kiekvienas jų davė pradžią visai grandinei radioaktyviųjų cheminių elementų. 311 užduotyje mes jau patyrinėjome vieną tokią grandinę. Kitame puslapyje pateikta atomų schema. Pasidarykite jos kopiją ir naudokite ją atlikdami šią užduotį.

a) Raskite schemoje $^{235}\mathrm{U}$ ir pažymėkite jo skilimo grandinę. Užbrūkšniuokite reikiamus langelius ir sujunkite juos linijomis (naudokitės spalvomis).
Grandinė baigiasi stabiliu izotopu. Kokiu?

b) Raskite $^{238}\mathrm{U}$ ir atlikite tą patį, kaip ir a) punkte.

c) Raskite $^{232}\mathrm{Th}$ ir atlikite tą patį, kaip ir a) ir b) punktuose.

d) Kodėl francis ir astatis yra itin reti cheminiai elementai? (Astatis yra rečiausias cheminis elementas Žemėje.)

e) Kuo radonas išsiskiria iš kitų sunkiųjų radioaktyviųjų cheminių elementų? Kodėl radonas sukelia daugiau problemų sveikatos higienos požiūriu nei kiti skilimo grandinių elementai?

Sunkieji cheminiai elementai

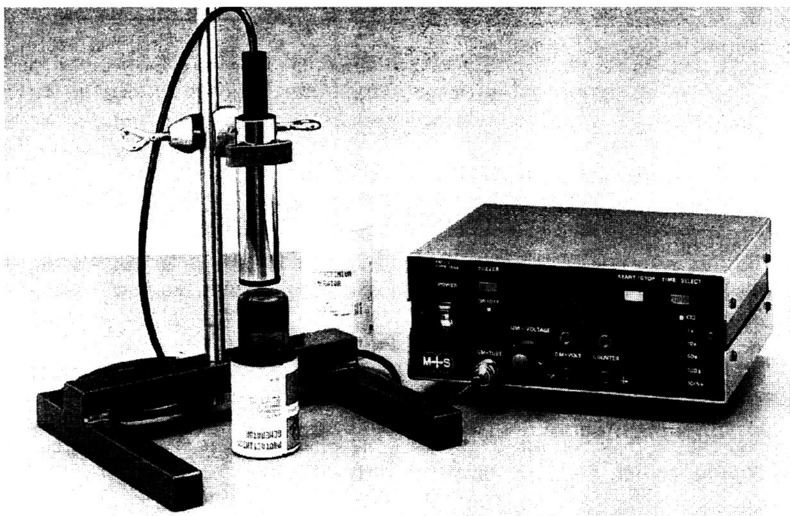
Protonai	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147		
95																						⊙	⊙	⊙	⊙	□	⊙	Am	Americis
94																		⊡	⊙	⊡	⊙	□	⊙	□	□	□	○	Pu	Plutonis
93																⊡	□	⊡	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	□	○	○	○	Np	Neptūnis
92														□	□	⊡	⊡	□	⊙	□	□	□	⊠	□	○	⊠	○	U	Uranas
91					□						□	□	□	□	⊡	□	⊡	⊙	⊙	□	○	○	○	○	○	○	○	Pa	Protaktinis
90					□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	⊡	□	□	□	□	□	○	⊠	○	○	○	○		Th	Toris
89	□	⊡	□	□	⊡	□	□	□	□	□	□	□	□	⊡	⊡	□	⊙	○	○	○	○	○	○					Ac	Aktinis
88	□	□	⊡	⊡	⊡	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	○	□	○	○	○	○						Ra	Radis
87	⊡	⊡	⊡	⊡	⊡	⊡	□	□	□	□	□	□	□	□	○	○	○	○	○	○	○	○						Fr	Francis
86	⊡	⊡	⊡	⊡	⊡	□	□	□	□	□	□	□	□	□	[○]	□	○	○	○	○								Rn	Radonas
85	⊡	⊡	⊡	⊡	•	⊡	□	□	□	□	□	□	□	[○]														At	Astatis
84	•	⊡	•	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□														Po	Polonis
83	•	•	•	•	•	■	[○]	[○]	[○]	[○]	[○]	○																Bi	Bismutas
82	•	■	•	■	■	■	○	○	○	○	○	○																Pb	Švinas
81	•	■	○	■	○	○	○	○	○																			Te	Telūras
80	■	■	○	■	○	○																						Hg	Gyvsidabris
	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	Neutronai	

Simboliai: ■ stabilus; □ α radioaktyvusis; ⊠ metastabilus (α radioaktyvusis); ○ β^- radioaktyvusis; • β^+ radioaktyvusis.
Pusamžiai: ^{235}U 704 milijonai metų; ^{238}U 4,47 milijardai metų; ^{232}Th 14,1 milijardo metų.

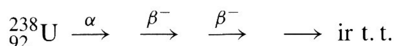
f) Panagrinėjome tris gamtoje pasitaikančias skilimo grandines. Iš principo jų galėtų būti keturios. Kodėl būtent keturios? Priežastis, kodėl gamtoje nestebima ketvirtoji grandinė, yra ta, kad trūksta izotopo, pasižyminčio ilgu pusamžiu. Bet tokių cheminių elementų galima sukurti dirbtinai. Pavyzdžiui, mokymo tikslams naudojamo ^{241}Am yra iš ketvirtosios grandinės.

g) Raskite schemoje ^{241}Am ir atlikite tą pat kaip ir a), b), c) punktuose.

314. Eksperimentas: Protaktinio generatorius



Protaktinio izotopas ^{234}Pa susidaro skylant ^{238}U:



$$^{238}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow{\alpha} \quad \xrightarrow{\beta^-} \quad \xrightarrow{\beta^-} \quad \longrightarrow \text{ ir t. t.}$$

Protaktinio generatorių sudaro indas, į kurį įpilta dviejų skysčių: vandeninio urano nitrato tirpalo koncentruotoje druskos rūgštyje ir organinio skysčio, kurio tankis mažesnis nei vandens. Šie skysčiai nesimaišo, tad po kurio laiko organinis skystis susitelkia viršuje. Skirtingai nuo urano ir torio, protaktinis organiniame skystyje tirpsta.

Prieš pradedant bandymą, reikia papurtyti ir apversti. Tokiu būdu ^{234}Pa izoliuojamas viršutiniame indo sluoksnyje, o kita α ir β spinduliuotė nėra tokia stipri, kad prasiskverbtų pro skystį ir indą iki viršuje įtaisyto Geigerio ir Miulerio vamzdžio. Matuodami Geigerio skaitikliu 10 sekundžių intervalais, tirsime β spinduliuotę. Duomenims kaupti galima pasinaudoti kompiuteriu. Taip pat reikės išmatuoti foninę spinduliuotę.

a) Baikite rašyti viršuje pateiktas (trijų pirmųjų) skilimų lygtis.

b) Logaritminiame popieriuje nubraižykite skilimo kreivę. x ašyje atidėkite laiką sekundėmis, y ašyje – matavimo rodmenų skaičius, pakoreguotus atsižvelgiant į foninę spinduliuotę. Pakoreguotieji skaičiai y ašyje atidedami ties laiko intervalų viduriu. Paklaida pažymima vertikaliais brūkšneliais abipus atidėtųjų taškų, jų ilgis – dukart kvadratinė šaknis iš matavimo rodmens. Taigi tie brūkšneliai žymės normaliąją sritį (žr. 301 užduotį). Koks dėsningumas išplaukia iš kreivės?

c) Nustatykite pusamžį ir palyginkite jį su verte iš lentelės ($T_{1/2} = 70{,}8$ s).

315. Mėginyje yra $7{,}0 \cdot 10^{-10}$ kg β radioaktyvaus izotopo stroncio ^{90}Sr.

a) Apskaičiuokite, kiek mėginyje yra ^{90}Sr branduolių.

b) ^{90}Sr pusamžis – 14,3 paros. Išreikškite pusamžį sekundėmis.

c) Apskaičiuokite skilimo konstantą.

d) Apskaičiuokite mėginio aktyvumą.

e) Užrašykite reakcijos lygtį.

316. Jei turite įvairių mokymo tikslams naudojamų radioaktyviųjų šaltinių, nustatykite, kiek į juos gaminant buvo įdėta radioaktyviosios medžiagos. Šaltinių pagaminimo data ir radioaktyvumas tuo metu nurodytas ant šaltinio.

317.

a) Anglies ^{14}C pusamžis yra 5730 metai. Išreikškite jį sekundėmis.

b) Apskaičiuokite skilimo konstantą.

c) Išmatuota, kad anglies gabalo radioaktyvumas – 560 Bq. Apskaičiuokite, kiek toje anglyje yra ^{14}C branduolių.

d) Apskaičiuokite, kiek sveria tie anglies atomai (iš pradžių atominiais masės vienetais, po to – kilogramais).

318. 23 procentus žmogaus kūno masės sudaro anglis, o $1{,}5 \cdot 10^{-10}$ procento šių anglies atomų masės sudaro ^{14}C. ^{14}C yra β radioaktyvi, jos pusamžis – 5730 metų.

Šiame uždavinyje nagrinėsime ^{14}C skilimą 70 kg sveriančio žmogaus kūne.

a) Kiek kilogramų anglies yra šio žmogaus organizme?

b) Kiek kilogamų ^{14}C yra šio žmogaus organizme?

c) Kiek tai būtų ^{14}C branduolių?

d) Išreikškite pusamžį sekundėmis ir apskaičiuokite ^{14}C skilimo konstantą.

e) Apskaičiuokite tiriamajame žmoguje esančių ^{14}C branduolių radioaktyvumą.

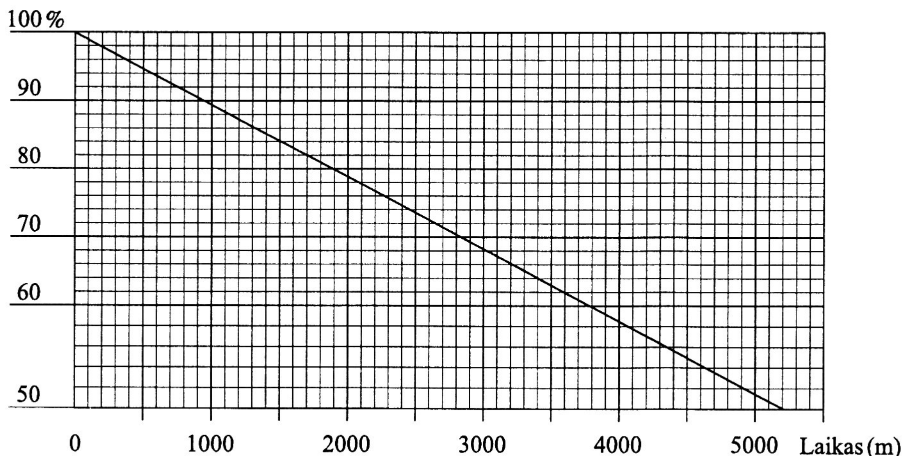
f) Galima sakyti, kad visa β spinduliuotė lieka kūne. Kadangi žinoma, jog vidutinė kiekvieno išlėkusio elektrono energija lygi $7{,}2 \cdot 10^{-12}$ J, apskaičiuokite, kiek energijos gauna organizmas per sekundę. Kiek energijos tenka žmogui per metus?

319. 0,2 procentus žmogaus kūno masės sudaro kalis, o 0,012 procentų šių kalio atomų masės sudaro ^{40}K. ^{40}K yra β radioaktyvus, jo pusamžis – 1 270 000 000 metų. Išspinduliuojamų elektronų vidutinė energija lygi $7{,}5 \cdot 10^{-14}$ J.

Atlikite tokius pat skaičiavimus kaip ir 318 užduotyje.

Sugretinkite šių dviejų užduočių e) ir f) punktų rezultatus.

Grafike pavaizduotąja ^{14}C skilimo kreive galima naudotis atliekant 320–324 užduotis. Grafiką nusikopijuokite ir kopijoje galėsite pasižymėti, kai pagal grafiką reikės ką nors rasti.



320. Graubalės vietovėje atkasto žmogaus palaikuose esančios anglies ^{14}C aktyvumas sudarė 78 procentus dabartinės organinės medžiagos aktyvumo. Kada mirė žmogus?

321. Šiaurės Grenlandijoje 1978 m. buvo rastos kelios labai gerai išsilaikiusios mumijos. Nacionalinio muziejaus specialistai ^{14}C metodu nustatė jų amžių. Geigerio skaitiklis užregistravo 16,7 impulsų per minutę, kai tuo tarpu dabartinis preparatas sukelia 17,8 impulsų per minutę. Nustatykite mirties datą.

322. Kasinėjant Bergthorsvolde, Islandijoje, buvo rastas sudegusiame ūkyje likęs medžio anglies klodas. Nustatinėjant ^{14}C metodu radinio amžių, Geigerio skaitikliu gauta 15,7 impulsų per minutę, kai dabartinis preparatas sukelia 17,8 impulsų per minutę.

Kaip teigia islandų sagos, Njalio dvaras sudegė 1011 metais. Ar gali būti, kad rastoji medžio anglis yra Njalio dvaro liekanos?

323. ^{14}C metodu nustatyta, kad archeologinio radinio amžius 5000 metų. Naudodamiesi amžiaus pataisos kreive 77 p., nustatykite tikrąjį radinio amžių.

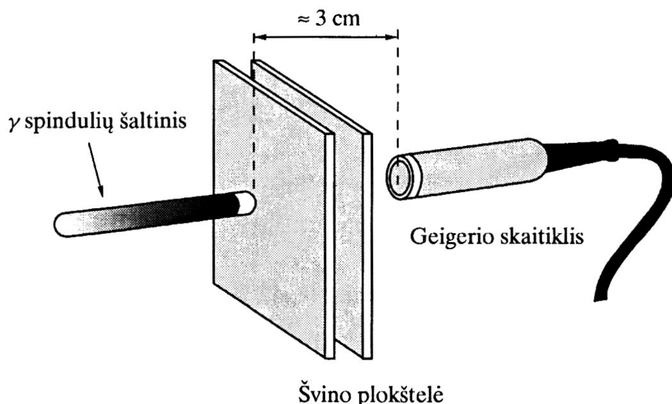
324. Nustatyta, kad archeologinio radinio ^{14}C aktyvumas sudaro 54 procentus dabartinės medžiagos aktyvumo. Koks radinio istorinis amžius?

325.

a) Pripilkite artipilnę alaus skardinę, butelį ar ilgą plastiko vamzdį vandens. Naudodamiesi γ spindulių šaltiniu ir Geigerio skaitikliu, nustatykite, kur yra vandens paviršius.

b) Giliame inde su smėliu yra paslėptas švino svarelis. Naudodamiesi radioaktyviuoju šaltiniu ir Geigerio skaitikliu, nustatykite, kur yra švino svarelis.

326. Eksperimentas: Kaip švinas sugeria γ spindulius



a) Iš pradžių pagal piešinyje parodytą schemą matuojama be radioaktyviojo šaltinio, pavyzdžiui, 10 minučių, ir nustatomas foninės spinduliuotės lygis.

b) Po to matuojama su šaltiniu, pavyzdžiui, 1 minutę: be švino plokštelės; su viena švino plokštele; su dviem švino plokštelėmis; su trimis.

c) Pakoreguokite matavimo rezultatus (vienetai – impulsai per minutę), atsižvelgdami į foninę spinduliuotę ir atidėkite juos logaritminiame popieriuje kaip švino storio funkciją (vienetai – milimetrai). Paklaida pažymima vertikaliais brūkšneliais, kaip ir 314 užduotyje. Ar galima per tuos brūkšnelius nubrėžti tiesę? Pagal kokį dėsnį spinduliuotės intensyvumas priklauso nuo švino sluoksnio storio?

17. 936

d) Kokio storio švino sluoksnio reikia, kad γ spindulių intensyvumas sumažėtų perpus? (Toks dydis vadinamas spinduliuotės pusstoriu.)

e) Pagal grafiką nustatykite, kokio storio švino sluoksnio reikia, kad jis sugertų 95 procentus γ spinduliuotės.

327. Kaip švinas ir aliuminis sugeria β spindulius
Čia darbo schema tokia pat kaip ir 326 užduotyje.

a) Pirmiausia išmatuojamas foninės spinduliuotės lygis be β spindulių šaltinio.

b) Po to su šaltiniu ištirkite, kiek reikia aliuminio plokštelių, kad β spinduliai būtų sugerti.

c) Raskite atitinkamą to sugeriančio aliuminio sluoksnio storį (milimetrais).

d) Pakartokite bandymą su švinu ir, jei įmanoma, su kitomis medžiagomis.

328. Gresiant radioaktyviam debesiui, geras patarimas būtų toks: „Grįžkite į patalpas, užsidarykite langus ir duris, nusiprauskite po dušu ir išgerkite jodo tablečių".

Raskite lentelėje ^{90}Sr, ^{137}Cs ir ^{131}I pusamžius. Turėdami omenyje šiuos duomenis, pakomentuokite pateikto patarimo prasmingumą.

329. Įvykus nelaimingam atsitikimui, žmogus buvo apšvitintas γ spinduliais. Organizmas sugėrė 50 mJ. Apskaičiuokite sugerties dozę D miligrėjais, jei apšvitintasis asmuo yra:

a) vaikas, sveriantis 30 kg;

b) 80 kg sveriantis suaugęs.

330. Apskaičiuokite efektinę dozę H milizyvertais, atitinkančią 4,0 miligrėjų dozę, jei buvo apšvitinta:

a) α spinduliais;

b) β spinduliais;

c) neutronais.

4 skyriaus užduotys

401. Apskaičiuokite, kiek energijos reikia suteikti ežerui, kuriame yra 3 milijonai litrų vandens, norint jį pašildyti nuo 5 iki 15 °C (žr. „Tikslieji mokslai humanitarams, I d.", 7.3 skirsnis). Įrodykite, kad ežero vandens masė tuomet padidės 1,4 mg.

402. Saulės masė yra $2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg, per sekundę ji išspinduliuoja $3{,}8 \cdot 10^{26}$ J energijos.

a) Naudodamiesi Einšteino formule, apskaičiuokite, kiek masės kilogramais Saulė netenka per sekundę.

b) Tarkime, kad per šiuos 4,5 milijardus metų, kurie praėjo nuo Saulės sistemos susidarymo, Saulės masė tolygiai mažėjo. Remdamiesi tokia prielaida, apskaičiuokite, kiek masės Saulė neteko iš viso.

c) Kokią dabartinės Saulės masės dalį procentais sudarytų tokie nuostoliai?

403. Anglies Saulė?

a) Sudegus 1 kg anglies išsiskiria apie 30 MJ šilumos. Kiek anglies reikia sudeginti per sekundę, norint pasiekti $3{,}8 \cdot 10^{26}$ J per sekundę galią?

b) Įsitikinkite, kad tokiu būdu per 5000 metų sudegtų $2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg anglies.

c) Kodėl Saulė negali būti iš anglies?

404. Vykstant branduolinei reakcijai, medžiagos masė sumažėjo 0,012 a.m.v. Apskaičiuokite išsiskyrusią energiją (pJ).

405. Vykstant branduolinei reakcijai, išsiskyrė 35 pJ energijos. Apskaičiuokite masės sumažėjimą (a.m.v.).

406. 200 MeV paverskite pikodžauliais. Paverskite 3,5 pJ megaelektronvoltais.

407. Ryšio energija ir masės defektas

a) Helio branduolį sudaro du protonai ir du neutronai. Remdamiesi lentele 91 p., apskaičiuokite bendrą šių keturių nukleonų masę $2m_p + 2m_n$ ir palyginkite ją su branduolio mase m. Toks skirtumas susidaro dėl ryšio energijos: norint suskaldyti helio branduolį į keturis nukleonus, reikia suteikti branduoliui energijos.
Apskaičiuokite vadinamąjį masės defektą $(2m_p + 2m_n) - m$ ir jį atitinkantį energijos kiekį (ryšio energiją).

b) Apskaičiuokite ^{56}Fe ir ^{226}Ra ryšio energiją.

c) Apskaičiuokite, kiek procentų bendros branduolių ^{4}He, ^{56}Fe ir ^{226}Ra masės sudaro masės defektas.

408. Uranas ^{238}U yra α radioaktyvus. Užrašykite branduolinės reakcijos lygtį ir raskite masės sumažėjimą. Apskaičiuokite, kiek energijos (pJ) išsiskiria vieno radioaktyviojo ^{238}U branduolio skilimo metu.

409. Anglis ^{14}C yra β^- radioaktyvi. Užrašykite branduolinės reakcijos lygtį ir raskite masės sumažėjimą. Apskaičiuokite, kiek energijos (pJ) išsiskiria vieno radioaktyviojo anglies ^{14}C branduolio skilimo metu.

410. Radonas ^{222}Rn yra α radioaktyvus. Užrašykite branduolinės reakcijos lygtį ir raskite masės sumažėjimą. Apskaičiuokite, kiek energijos (pJ) išsiskiria vieno radioaktyviojo radono ^{222}Rn branduolio skilimo metu. Kiek branduolių yra 1,0 mg radono ^{222}Rn? Apskaičiuokite, kiek energijos (pJ) išsiskiria skylant 1,00 mg radono ^{222}Rn.

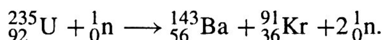
411. Stroncis ^{90}Sr yra β^- radioaktyvus. Užrašykite branduolinės reakcijos lygtį ir raskite masės sumažėjimą. Apskaičiuokite, kiek energijos (pJ) išsiskiria vieno radioaktyviojo ^{90}Sr branduolio skilimo metu. Kiek branduolių yra 0,5 g ^{90}Sr? Apskaičiuokite, kiek energijos (pJ) išsiskiria skylant 0,5 g ^{90}Sr.

412. Apšaudant litį ^{7}Li protonais, susidaro berilis ^{7}Be ir neutronai. Užrašykite branduolinės reakcijos lygtį ir apskaičiuokite masės padidėjimą. Kiek protonų judėjimo energijos (pJ) virto mase?

413. Barsebekas
Švedų atominėje jėgainėje Barsebeke yra du reaktoriai – Sofija ir Bentas. Kiekvieno jų šiluminė galia – apie 1700 MW, ir po 615 MW kiekvieno jų galios suvartojama elektros energijai gaminti. Į kiekvieną reaktorių aušinimui iš Ėresūno sąsiaurio per sekundę įsiurbiama po 25 m^3 vandens.

a) Apskaičiuokite, kiek laipsnių pakyla aušinimo vandens temperatūra (žr. „Tikslieji mokslai humanitarams, I d.“, 7.3 skirsnis).

b) Branduolių dalijimasis, kurio metu jėgainėje išsiskiria energija, gali vykti šitaip:



$$^{235}_{92}\mathrm{U} + ^{1}_{0}\mathrm{n} \longrightarrow ^{143}_{56}\mathrm{Ba} + ^{91}_{36}\mathrm{Kr} + 2\,^{1}_{0}\mathrm{n}.$$

Apskaičiuokite šio vyksmo metu išsiskiriančią energiją (pJ).

Bendra energijos išeiga esti dar didesnė, mat dalijimosi produktai patys būna nestabilūs ir spinduliuoja. Galima sakyti, kad pasidalijus vienam ^{235}U branduoliui, išsiskiria apie 32 pJ energijos.

c) Kiek branduolių yra 1,00 kilograme gryno ^{235}U?

d) Kiek energijos (J) išsiskiria pasidalijus 1 kg gryno ^{235}U branduolių?

e) Gamtoje aptinkamame urane būna tik 0,7 procento ^{235}U, kita dalis – ^{238}U. Kiek energijos (J) išsiskiria pasidalijus tam ^{235}U kiekiui, kuris būna 1 kg gamtinio urano?

f) Palyginkite šią energiją su energijos kiekiu, išsiskiriančiu sudegus 1 kg anglies ar naftos (apie 30 MJ).

g) Kiek dalijimosi aktų įvyksta per sekundę kiekviename Barsebeko reaktorių?

h) Kiek kilogramų urano ^{235}U suvartojama kiekviename reaktoriuje per parą?

i) Kiekviename Barsebeko reaktoriuje būna apie 80 tonų urano, iš kurių 4 procentai yra ^{235}U. Pamėginkite įvertinti, kaip ilgai užtenka šio kuro.

j) Kuro kasetės keičiamos sykį per metus. Tai atliekama vasarą, kai elektros energijos poreikiai sumažėja. Pamėginkite įvertinti, kurią dalį kuro kasečių tenka kasmet pakeisti.

414. Eksperimentas: Branduolinė energija

a) *Kuras.* Patyrinėkite, kas vyksta urano kasykloje. Kaip ir kur uranas gaunamas? Kokio didumo yra urano ištekliai? Kaip uranas sodrinamas?

b) *Reaktorių tipai.* Kokių tipų esama šiluminių reaktorių? Kas yra brideris (dauginimo reaktorius)?

c) *Atominės jėgainės eksploatacija.* Kokį poveikį aplinkai daro normaliai veikianti atominė jėgainė? Palyginkite jos poveikį su šiluminės elektrinės poveikiu.

d) *Piktnaudžiavimas atominėmis medžiagomis.* Kokį atominių reaktorių kurą ar atliekas galima panaudoti ginklų gamybai? Patyrinėkite saugumo ir kontrolės priemones.

e) *Radioaktyviosios atliekos.* Kas yra mažo, vidutinio ir didelio aktyvumo atliekos? Kaip su jomis elgiamasi ir kur jos laikomos? Kaip uždaroma atominė jėgainė?

f) *Asmeninis vertinimas.* Pamėginkite įvertinti atominės jėgainės privalumus ir trūkumus. Čia būtų galima kalbėti ir apie kitus energijos gavimo būdus.

415. Urane vykstant dalijimosi reakcijai, neutronų daugėjimo koeficientas k apibrėžiamas kaip kurios nors „kartos" neutronų skaičiaus santykis su ankstesnės „kartos" neutronų skaičiumi.

Jeigu nulinėje kartoje yra 1 neutronas, tai x kartoje bus $y = k'$ neutronų.
Jeigu $k = 1$, vyksta grandininė reakcija ir išsiskiria pastovus energijos kiekis.
Jeigu $k < 1$, reakcija nutrūksta.
Jeigu $k > 1$, reakcija vyksta griūtiškai.

a) Užpildykite lentelę, pasirinkę k vertes 1,0, 1,05 ir 1,10:

Kartos Nr. x	0	1	2	...
Neutronų skaičius y	1			...

Rezultatus pažymėkite logaritminiame popieriuje.

b) Pasirinkite supaprastintą grandininės reakcijos modelį tarę, kad gretimas neutronų kartas skiria 0,001 s. Apskaičiuokite daugiklį, kuriuo neutronų skaičius išauga per vieną sekundę, jei $k = 1,001$, t. y. jeigu neutronų skaičius sulig kiekviena nauja karta padidėja viena tūkstantąja dalimi.

c) Apskaičiuokite daugiklį, kuriuo neutronų skaičius išauga per vieną sekundę, jei $k = 1{,}01$, t. y. jei neutronų skaičius sulig kiekviena nauja karta išauga 1 procentu.

d) Pakomentuokite gautus rezultatus.

416. Protonų–protonų grandinė
Saulės energija išsiskiria vykstant vadinamajai protonų–protonų grandinės reakcijai, kurią sudaro trys etapai:

1 vyksmas – dviejų ^{1}H branduolių sintezė, kuomet susidaro ^{2}H bei pozitronas e^+.
2 vyksmas – ^{1}H ir ^{2}H sintezė.
3 vyksmas – dviejų ^{3}He branduolių sintezė, susidarant vienam ^{4}He branduoliui ir dviem ^{1}H branduoliams.

a) Užrašykite kiekvieno vyksmo reakcijos lygtį.

b) Apskaičiuokite, kiek energijos išsiskiria kiekvienos reakcijos metu.

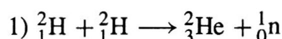
c) „Bruto“ vyksmas būtų toks:

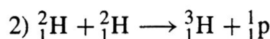
$2 \cdot 1$ vyksmas $+ 2 \cdot 2$ vyksmas $+ 1 \cdot 3$ vyksmas.

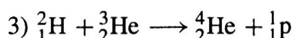
Paaiškinkite, kokie susidaro ir susinaudoja „neto“ branduoliai tokio „bruto“ vyksmo metu.

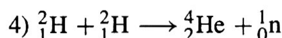
d) Apskaičiuokite, kiek tokios protonų–protonų grandinės atveju iš viso išsiskiria energijos.

417. Žvaigždėse paprasčiausi vandenilio branduoliai gali jungtis į helį. Branduolių sintezės reaktoriuje parankiau naudoti sunkųjį vandenį (deuterį). Tipiškos reakcijos, kur dalyvauja deuteris, atrodo šitaip:


1) ${}^2_1H + {}^2_1H \longrightarrow {}^2_3He + {}^1_0n$


2) ${}^2_1H + {}^2_1H \longrightarrow {}^3_1H + {}^1_1p$


3) ${}^2_1H + {}^3_2He \longrightarrow {}^4_2He + {}^1_1p$


4) ${}^2_1H + {}^2_1H \longrightarrow {}^4_2He + {}^1_0n$

a) Nusakykite kiekvieną vyksmą žodžiais (pavyzdžiui, taip: „1) punkte jungiasi du deuterio branduoliai, ir susidaro...“).

b) Apskaičiuokite, kiek kiekvienos šių reakcijų metu sumažėja masė ir kiek išsiskiria energijos.

5 skyriaus užduotys

501. Nupieškite ant dviejų skaidrių demonstracinių plėvelių tą patį raštą. Uždėkite plėveles vieną ant kitos ir viršutinę visaip sukiokite ir vartykite. Kokius iš penkių galimų judesių atlikote? Pamėginkite dar sykį.

502. Nupieškite ornamentus, kurie gaunami atlikus penkis galimus judesius su šiais raštais.

a) F F F F

b) A A A A

503. Raskite šių ornamentų pagrindinį raštą ir nubraižykite ornamentus, gautus atlikus penkis galimus judesius.

Kokia jie pasižymi simetrija?

a) b d b d b d b d

b) b p b p b p b p

c) b q b q b q b q

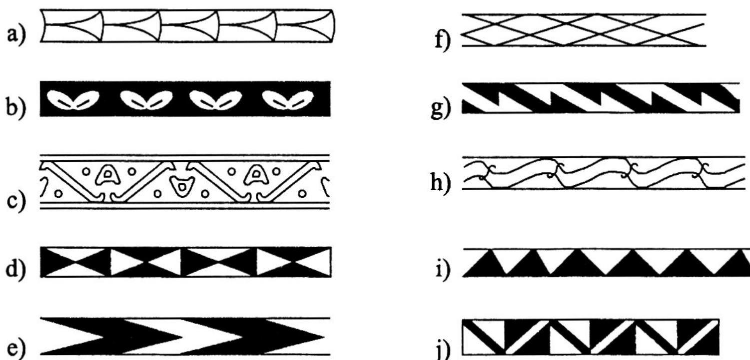
d) b q p d b q p d

e) b d b d b d b d
p q p q p q p q

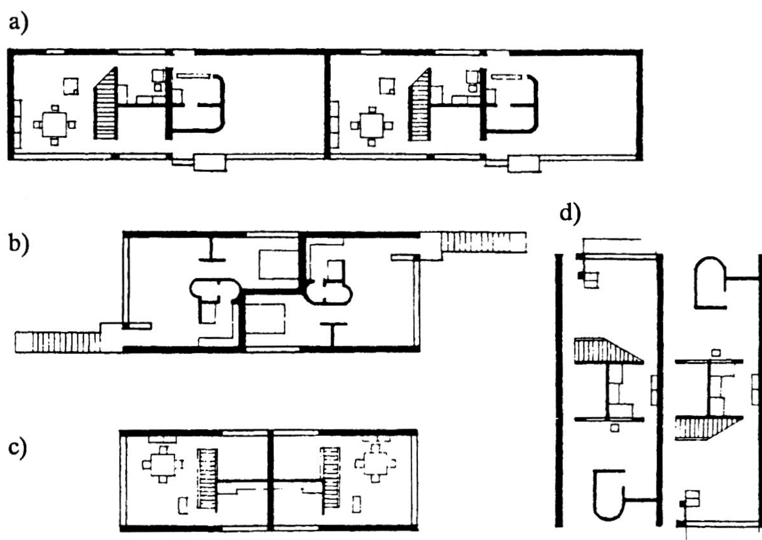
f) b b b b b b b b
q q q q q q q q

g) b b b b b b b b

504. Nustatykite, kokia simetrija pasižymi šie ornamentai:



505. Piešinėlyje pateikti šveicarų architekto Le Korbiuzjė* brėžiniai. Įsivaizduokime, kad kiekvienas brėžinys – tai ornamento pagrindinis raštas. Kokia simetrija pasižymi šie ornamentai?



506. Naudodami tik raidę A, pavaizduokite kiekvieną iš septynių galimų ornamentų tipų. Padarykite taip, kad kas antra raidė A ornamente būtų pasukta.

507. Pasinaudodami lošimo korta, dviem skirtingais būdais pavaizduokite 4 tipo ornamentą.

508. Naudodami duotąjį piešinį, nubraižykite 5 tipo ornamentą.
Kas antras piešinys ornamente turėtų būti, pavyzdžiui, kas antrą sykį pasuktas. Žiūrėkite, kad neįvestumėte per daug simetrijų!



509. Ar ornamentai 118 puslapyje simetrijos tipų atžvilgiu išdėstyti „teisinga" seka?

---

* Ch. E. J. Le Corbusier (1887–1965) – Šveicarijoje gimęs, daugiausia Prancūzijoje dirbęs architektas.

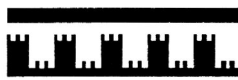
510. Paveikslėlis vaizduoja ornamentą, gautą nuspalvinus „pusę“ 7-ojo tipo ornamento. Išvydus tokį ornamentą, paprastai reikia kelių akimirkų, kad suvoktum, jog juodas raštas tapatus su baltuoju. Suvokęs tai, tarytum praregi.



a) Nusipieškite pradinį 7-ojo tipo ornamentą (dar nenuspalvintą).

b) Kokio tipo ornamentu jis tampa, kai nuspalvinamas?
Kiti šio tipo ornamentų pavyzdžiai:

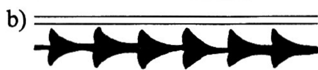




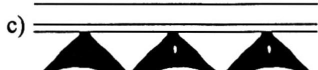
511. Nustatykite šių indėnų ornamentų tipus (iš San Ildefonso Pueblo, Nju Meksiko valstija, JAV).

a) 

e) 

b) 

f) 

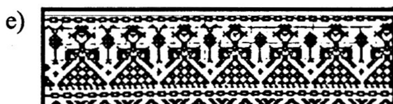
c) 

g) 

d) 

512. Nustatykite šių ornamentų tipus (vengrų rankdarbiai).

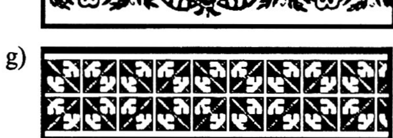
a) 

e) 

b) 

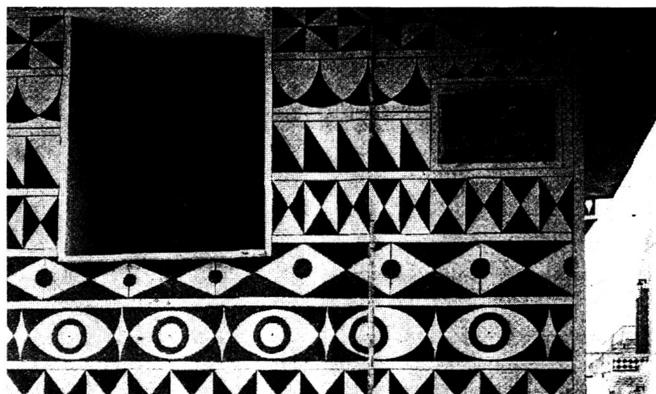
f) 

c) 

g) 

d) 

513. Kaip matyti nuotraukoje, siena papuošta septyniais ornamentais. Nustatykite šių septynių ornamentų tipus.



Ornamentais papuoštos sienos Pirge fragmentas (Graikija).

514. Ištyrus dviejų skirtingų kultūrų molio dirbinių rinkinius, nustatyti tokie puošybos ornamentų tipų pasikartojimo dažnumai:

	Pasikartojimų skaičius	
	Mesa Verde, Š. Amerika	Begho, Gana, Afrika
Tipas 1	7	4
Tipas 2	5	9
Tipas 3	12	22
Tipas 4	93	19
Tipas 5	11	2
Tipas 6	19	165
Tipas 7	27	9

a) Pakomentuokite lentelę.

b) Visi žemiau pateiktieji ornamentai yra kurios nors iš šių dviejų kultūrų. Nuspręskite kiekvienu atveju, kokia ornamento kilmė labiau tikėtina.

1) 6)

2)

7)

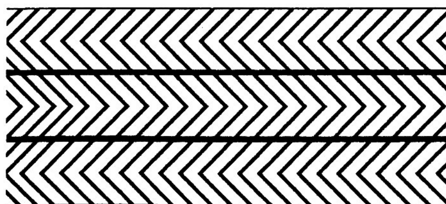
3)

8)

4)

5) 9)

515. Iš pirmo žvilgsnio neatrodo, kad šis piešinėlis vaizduotų ornamentą. Kodėl? Įrodykite, kad tai tikrai ornamentas ir nustatykite jo tipą.



6 skyriaus užduotys

601. Užrašykite reakcijų lygtis, kurios vyksta įpylus į vandenį šių rūgščių:

a) druskos rūgšties HCl;

b) fosforo rūgšties H_3PO_4;

c) amonio jonų NH_4^+;

d) oksonio jonų H_3O^+.

602. Užrašykite reakcijų lygtis, kurios vyksta įpylus į vandenį šių bazių:

a) hidrokarbonato jonų HCO_3^-;

b) sulfato jonų SO_4^{2-};

c) nitrato jonų NO_3^-;

d) oksido jonų O^{2-}.

603. Kokius perspėjančius ženklus reikia užrašyti ant etiketės su buteliu:

a) koncentruotos HCl;

b) 4M HCl;

c) 1M HCl;

d) kieto NaOH;

e) koncentruotos acto rūgšties.

604. Atsiverskite leistinų naudoti maisto priedų sąrašą ir raskite kai kurių rūgščių – pavyzdžiui, acto rūgšties (CH_3COOH), fosforo rūgšties (H_3PO_4) – E numerį.

605. Eksperimentas: pH nustatymas lakmuso popierėliu
Į mėgintuvėlį įpilkite 5 mℓ 1M HCl. Universaliuoju lakmuso popierėliu nustatykite pH vertę. Tuomet įpilkite 1 mℓ 1M NaOH ir vėl nustatykite pH. Tada įpilkite dar 1 mℓ 1M NaOH ir nustatykite pH. Galiausiai įpilkite 3 mℓ NaOH ir nustatykite pH.

606. Eksperimentas: Naudojimasis pH-metru
Iš pradžių pH-metras nustatomas vadinamuoju buferiniu tirpalu, t. y. skysčiu, kurio pH vertė žinoma (imkite, pavyzdžiui, buferinį tirpalą, kurio pH = 7). Į buferinį skystį įmerkiamas elektrodas ir nustatoma pH-metro skalė ties 7. Tada matuojami įvairių tirpalų pH, po kiekvieno matavimo nuskalaujant elektrodą distiliuotu vandeniu. Kiekvieno mėginio imama po 10 mℓ. Išmatuokite, pavyzdžiui, vaisvandenių, koka kolos, pieno, pasukų, distiliuoto vandens ir vandentiekio vandens pH.

607. Eksperimentas: Ar rūgščios šermukšnio uogos?
Sumaigykite kekę raudonų šermukšnio uogų ir užpilkite distiliuotu vandeniu. Gerai išmaišykite. Universaliuoju indikatoriumi patikrinkite gauto tirpalo pH.

608. Eksperimentas: Lietaus ir kitokio vandens pH

a) Atokiau nuo pastatų ir medžių padedama švari stiklinė, kad į ją prilytų reikiamas kiekis vandens (į stiklinę neturi patekti vabzdžių nei kokių nors šiukšlių). To paties lietaus vandens prirenkama į kitą švarią stiklinę, padėtą po medžiu. Lakmuso popierėliu ar pH-metru nustatomos abiejų vandens mėginių pH vertės. Rezultatai palyginami ir komentuojami.

b) Nustatomos vandentiekio vandens, demineralizuoto (distiliuoto) vandens ir mineralinio vandens pH vertės. Gautieji rezultatai palyginami ir komentuojami. Palyginami punktų a) ir b) rezultatai. Kas įeina į mineralinį vandenį?

609. Baikite rašyti šias reakcijų lygtis:

a) $HCl + NH_4 \longrightarrow$

b) $HNO_3 + OH^- \longrightarrow$

c) $H_2SO_4 + OH^- \longrightarrow$

d) $CH_3COOH + CO_2^{2-} \longrightarrow$

610. Ant butelio su chemikalais parašyta:

Kaustinė soda		
NaOH	0,15M	500 mℓ

a) Apskaičiuokite NaOH molio masę.

b) Kiek gramų yra 0,15 molio NaOH?

c) Kiek gramų NaOH yra pilname butelyje?

611. KBr galima naudoti kaip raminamuosius ar kaip vaistus nuo pykinimo. Reikia pagaminti 200 mℓ 0,6 M koncentracijos tirpalo.

a) Kaip tokios koncentracijos medžiaga vadinama?

b) Kiek gramų KBr reikės?

c) Kas daroma pasvėrus b) punkte apskaičiuotą KBr kiekį?

612. Puodelyje (125 mℓ) stiprios kavos yra apie 0,16 g kofeino. Kofeinas ($C_8H_{10}N_4O_2$) yra tonizuojančioji medžiaga.

a) Kiek molių kofeino yra puodelyje kavos?

b) Kokia yra kofeino koncentracija?

613. Potašas yra balti milteliai, naudojami, be kita ko, kepinių tešlai kildinti. Ant pakelio užrašyta:

Potašas		
K_2CO_3	3M	250 mℓ

a) Kaip ši medžiaga vadinama chemikų kalba?

b) Apskaičiuokite K_2CO_3 molio masę.

c) Nurodykite, kaip pasigaminti tokį tirpalą.

614. Eksperimentas: pH ir koncentracija

Pirmiausia, kaip aprašyta 606 užduotyje, buferiniu tirpalu suderinamas pH-metras. Po to tiriami 1M, 0,1M, 0,01M bei 0,001M koncentracijos HCl ir NaOH tirpalai, naudojant jų 10 mℓ mėginius. Sudarykite koncentracijų ir atitinkamų pH verčių lenteles abiems medžiagoms HCl ir NaOH. Kokią iš šių lentelių galima padaryti išvadą apie sąryšį tarp rūgšties ar bazės koncentracijos ir jos pH vertės?

615. Eksperimentas: Indikatorius iš rožių žiedlapių

Prisiskinkite raudonų rožių žiedlapių ir užpilkite juos atskiestu spiritu. Palaikykite keletą dienų, kad pritrauktų. Tada išpilstykite šios trauktinės po tą patį kiekį į penkis mėgintuvėlius. Į pirmąjį įpilkite 1 mℓ 4M HCl, į antrąjį – 1 mℓ 4M NH_3, į trečiąjį – 1 mℓ 4M CH_3COOH, į ketvirtąjį – 1 mℓ 2M NaOH ir galiausiai į penktąjį – 1 mℓ distiliuoto vandens. Stebėkite, kas vyksta.

Tokį pat bandymą galima atlikti su raudonųjų kopūstų, šeivamedžio uogų ir pan. antpilu.

616. Fredai vonios kambarėlyje ($8\,m^3$) iš rankų išsprūdo ir sudužo 1 dℓ talpos buteliukas nagų lako tirpiklio, į kurio sudėtį įeina acetonas (CH_3COCH_3). Freda buvo taip užsiėmusi, kad paliko grindis neiššluostytas ir tirpiklis išgaravo. Acetono tankis 0,79 g/mℓ.

Kokia bus acetono garų koncentracija (m.d.) vonios kambaryje? Ar dėl to verta nerimauti?

617. 1 litre vandeninio NaOH tirpalo yra 2,0 g NaOH.

a) Kiek molių NaOH yra 10,0 mℓ tirpalo?

b) Kiek molių HCl reikės, norint neutralizuoti šiuos 10,0 mℓ tirpalo?

c) Reikiamas kiekis HCl molių gautas iš druskos rūgšties tirpalo, suvartojus 14,3 mℓ. Apskaičiuokite to druskos rūgšties tirpalo koncentraciją.

618. Eksperimentas: Stiprios rūgšties titravimas stipria baze

Reikia nežinomos koncentracijos druskos rūgštį titruoti su 0,1M NaOH.

Kaip indikatorius naudojamas bromtimolio mėlis. Įpilkite į kolbą 40 mℓ druskos rūgšties ir įlašinkite keletą lašų indikatoriaus. Biurete atsargiai varvinkite NaOH, kol išryškės mėlyna spalva. Išmatuokite, kiek įvarvinote NaOH. Užrašykite reakcijos lygtį. Kiek molių NaOH reikia, norint neutralizuoti 1 mol HCl? Kiek molių NaOH įvarvinta iš viso? Kiek molių HCl buvo 40 mℓ druskos rūgšties? Kokia druskos rūgšties koncentracija?

619. Eksperimentas: Askorbo rūgšties tabletė

Sutrintą askorbino rūgšties tabletę ištirpinkite distiliuotame vandenyje. Įlašinkite keletą lašų fenolftaleino. Tuomet titruokite su 0,02M NaOH, kaip aprašyta 618 užduotyje. Kiek mℓ NaOH įvarvinote iš viso? Apskaičiuokite, kiek tai molių. 1 mol NaOH neutralizuoja lygiai 1 mol askorbo rūgšties ($C_6H_8O_6$). Kiek tuomet tabletėje buvo molių askorbo rūgšties? Nustatykite askorbo rūgšties molio masę ir tada apskaičiuokite, kiek mg askorbo yra tabletėje. Gautą rezultatą palyginkite su užrašu etiketėje.

620.

a) Kokia yra vandeninio H_3O^+ tirpalo pH vertė, jei jo koncentracija 0,05M? Jei koncentracija 0,02M? Jei 4,0M?

b) Kokia yra vandeninio tirpalo H_3O^+ koncentracija, jei pH yra 0,5? Jei pH yra 0,7? Jei 2,7?

621. Turima 0,5 ℓ 0,01M druskos rūgšties.

a) Kokia tirpalo pH vertė? (žr. pav. 135 p.)

b) Kiek tirpale yra molių H_3O^+?

c) Tirpalas praskiedžiamas 1,5 ℓ gryno vandens. Kiek molių H_3O^+ yra tirpale dabar?

d) Kokia yra H_3O^+ koncentracija?

e) Iki kiek padidėjo pH vertė?

f) Kiek kartų sumažėjo H_3O^+ koncentracija? Ar tirpalo pH vertė tiek pat kartų padidėjo?

622. Mokytojo su padidėjusiu rūgštingumu skrandyje, kur yra 1,0 ℓ skysčio, pH vertė lygi 1,4. Rūgštingumo priežastis – druskos rūgštis HCl(v.t.).

a) Kiek molių druskos rūgšties yra skrandyje?

b) Norėdamas bent kiek neutralizuoti rūgštis savo skrandyje, mokytojas išgeria miltelių, kurių sudėtyje yra bazės – 0,60 g magnio oksido MgO. Kiek molių MgO jis išgeria?

c) Baikite rašyti rūgšties ir bazės reakcijos lygtį:


$2HCl + MgO \longrightarrow$

d) Kiek molių druskos rūgšties neutralizuojama?

e) Kokia pasidaro druskos rūgšties koncentracija išgėrus miltelių? Kokia pH vertė?

623. 2M druskos rūgšties tirpalas praskiedžiamas 80 kartų. Kokia tada praskiestojo tirpalo koncentracija? Kokia pH vertė?

624. Dviejose cheminėse stiklinėse yra atitinkamai 100 mℓ 0,015M ir 550 mℓ 0,040M azoto rūgšties. Kokios šių tirpalų pH vertės? Abiejų stiklinių turinys sumaišomas. Kokia mišinio koncentracija? Kokia mišinio pH vertė?

625. Eksperimentas: Acto rūgšties santykis

Namų ūkyje naudojamas dvejopas acto rūgšties vandeninis tirpalas: praskiestas ir didesnės koncentracijos.

Labiau praskiestas (paprastas maistinis actas) suteikia patiekalams rūgštų skonį ir vartojamas padažams, majonezui gaminti, silkei marinuoti.

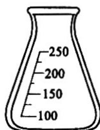
Labiau koncentruoto tirpalo negalima naudoti maistui ruošti. Jis naudojamas kavos aparatams, vonios plytelėms nukalkinti.

Šiame pratime reikės nustatyti maistinio acto koncentraciją. Jums reikės:
biuretės su 0,100M NaOH(v.t.), dviejų pipečių (10 mℓ ir 25 mℓ), 100 mℓ matavimo kolbos, kūginės kolbos (250 mℓ), magnetinės maišyklės; maistinio acto, fenolftaleino tirpalo, distiliuoto vandens.

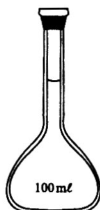
Nurodymai:

I. Pirmiausia maistinis actas praskiedžiamas lygiai 10 kartų. Pipete įlašinkite į matavimo kolbą 10 mℓ maistinio acto. Tuomet įpilkite distiliuoto vandens, kol kolboje bus 100 mℓ skysčio. Tada viską gerai suplakite.

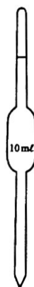
II. 25 mℓ pagaminto tirpalo pipete įvarvinkite į kūginę kolbą. Įlašinkite 3–4 lašus fenolftaleino tirpalo. Atsargiai įleiskite į kolbą magnetą ir pastatykite ją ant magnetinės maišyklės.



Kūginė kolba



Matavimo kolba



Pipetė


Biuretė

III. Išstumkite biuretės smaigalyje susikaupusius oro burbuliukus ir nustatykite nulį. NaOH tirpalą lašinkite į kūginę kolbą vis pamaišydami, kol tirpalas pasidarys rausvas (nustokite lašinti tada, kai rausva spalva daugiau neblykš). Biurete pamatuokite, kiek suvartojote NaOH(v.t.).

IV. Pakartokite II ir III punktus. Nepamirškite pirma išplauti kūginės kolbos. Dviejuose bandymuose suvartoto NaOH(v.t.) kiekiai turi skirtis ne daugiau kaip 0,5 mℓ.

Bandymo rezultatų pateikimas:

a) Nurodykite jūsų nustatytas dviejų suvartotų NaOH(v.t.) kiekių vertes. Apskaičiuokite vidurkį ir šiuo rezultatu naudokitės toliau skaičiuodami.

b) Baikite rašyti reakcijos lygtį ir po kiekviena medžiaga nurodykite jos cheminį pavadinimą:

$CH_3COOH(v.t.) + NaOH(v.t.) \longrightarrow$

c) Paaiškinkite, kodėl tirpalas pasidarė rausvas.

d) Kiek molių NaOH buvo įleista iš biuretės?

e) Kiek tuomet molių CH_3COOH buvo tuose 25 mℓ tirpalo? Kokia šio tirpalo koncentracija?

f) Kokia maistinio acto koncentracija?

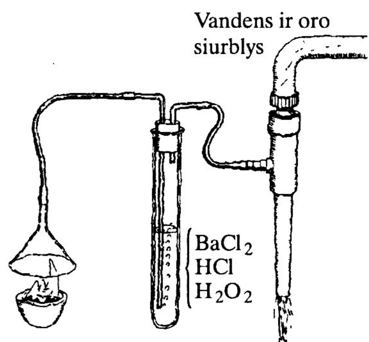
g) Nustatykite CH_3COOH molio masę (naudokitės periodine cheminių elementų lentele).

h) Apskaičiuokite, kiek g CH_3COOH yra 1 litre maistinio acto.

i) Apskaičiuokite masę procentais, jei 1 ℓ maistinio acto masė lygi 1005 g (pasverkite patys). Palyginkite gautąjį rezultatą su verte, nurodyta etiketėje.

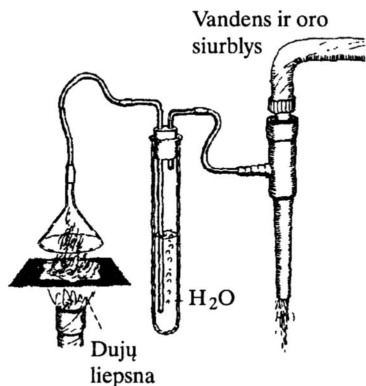
626. Eksperimentas: Naftoje esančio sieros kiekio nustatymas

Porceliano dubenėlyje sudeginama truputis naftos. Išsiskyrusios dujos, kaip pavaizduota piešinėlyje, leidžiamos pro tirpalą, kuriame yra 5 mℓ $BaCl_2$, 5 mℓ druskos rūgšties (HCl) ir 5 mℓ praskiesto vandenilio peroksido (H_2O_2). Po kelių minučių mėgintuvėlyje nusėda baltos $BaSO_4$ nuosėdos. Naudodamiesi reakcijos lygtimi, paaiškinkite, ar tai leidžia teigti, jog naftoje yra sieros.



627. Eksperimentas: PVC degimas (nepamirškite nusiurbti)

Ant metalinio tinklelio, kaip pavaizduota paveikslėlyje, kaitinama polimerinė plėvelė. Degimo metu išsiskyrusios dujos leidžiamos pro distiliuotą vandenį. Deginama keletą minučių, tada liepsna užgesinama ir nustatoma mėgintuvėlyje esančio skysčio pH. Pakomentuokite rezultatus. Tuomet įpilkite truputį sidabro nitrato ($AgNO_3$), kol iškris sidabro chlorido (AgCl) nuosėdos. Remdamiesi reakcijos lygtimi, paaiškinkite, jog tai rodo, kad degant PVC, susidaro HCl.



628. Eksperimentas: Chloro plastike nustatymas
Dujų liepsnoje pakaitinkite galą varinės vielos, kol ji nustos švytėti žaliai. Taip nuo vielos nudeginamas galimas vario oksido apnašas. Tuomet įkaitusios vario vielos galą įbeskite į plastiko mėginį ir vėl palaikykite liepsnoje. Jeigu švytės žaliai, vadinasi, ten esama chloro, o tas plastikas tuomet veikiausiai yra PVC. Tokiu būdu įrodoma, kad plastike esama chloro, nes chloras oksiduoja vario atomus iki vario jonų, o šie suteikia liepsnai žalią spalvą.

629. Užrašykite šių reakcijų lygtis (rūgščių su metalais):

a) druskos rūgšties su magniu;

b) azoto rūgšties su aliuminiu;

c) sieros rūgšties su alavu.

630. Eksperimentas: Cinką ėsdina sieros rūgštis
Į mėgintuvėlį įberiama truputis cinko miltelių ir įpilama praskiestos sieros rūgšties (H_2SO_4). Susidarusios dujos surenkamos į mėgintuvėlį ir įkišamas degantis degtukas. Stebėkite, kas vyksta, užrašykite reakcijos lygtį ir paaiškinkite, kokios susidarė dujos.

631. Eksperimentas: Marmuro tirpimas druskos rūgštyje

a) Sugrūskite nedidelį gabalėlį marmuro ($CaCO_3$). Pasverkite jo maždaug 0,1–0,2 g.

b) Raskite $CaCO_3$ molio masę ir apskaičiuokite, kiek marmuro paėmėte:

$$\text{molių skaičius} = \frac{\text{gramų } CaCO_3}{\text{gramų 1 molyje } CaCO_3}$$

c) Apskaičiuokite, kiek mℓ 1M HCl jums mažiausiai reikės norint ištirpinti visą $CaCO_3$, kai:



$$CaCO_3 + 2HCl \longrightarrow CO_3 + H_2O + CaCl_3.$$

d) Universaliuoju lakmuso popierėliu nustatykite 1M HCl pH.

e) Suberkite marmurą į mėgintuvėlį ir užpilkite HCl (pavyzdžiui, dvigubai daugiau nei c) punkte apskaičiuotą kiekį). Ar išsiskiria dujos? Kokios?

f) Reakcijai pasibaigus, nustatykite tirpalo pH. Pakomentuokite rezultatą.

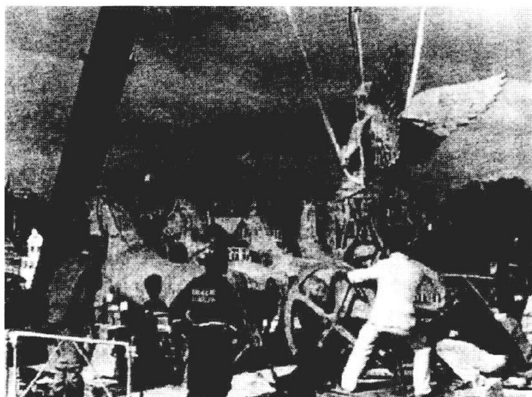
g) Kokių molekulių bei jonų bus mėgintuvėlyje?

632. Iš kokių medžiagų sudarytas žalvaris? Pakomentuokite žinutę iš žurnalo. Parašykite atitinkamas reakcijos lygtis.

Pergalės deivės nužengimas

Per Dabelsteen

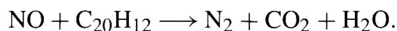
Šimtą keturiasdešimt metų išbuvusiai ant Torvaldseno muziejaus stogo pergalės deivei Viktorijai ir jos keturkinkiui teko nusileisti. Didėjanti tarša, be kita ko, ir sieros dioksidas, kenkia šiam paminklui, ir trijų metrų aukščio bei keturių metrų pločio žalvario skulptūrų grupė, norint ją išsaugoti, buvo nukelta.



Po 140 metų Viktorija nukeliama nuo Torvaldseno muziejaus stogo.

633. Pasinaudokite enciklopedija ir išsiaiškinkite, iš ko sudarytas smiltainis, ir paaiškinkite, kodėl smiltainio skulptūras bei statinius veikia rūgštieji lietūs.

634. Išlyginkite automobilio katalizatoriuje vykstančią reakciją:

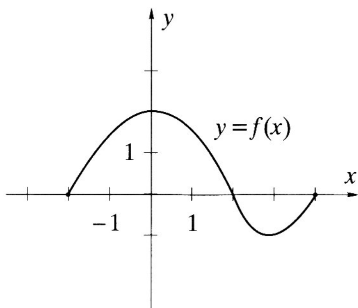


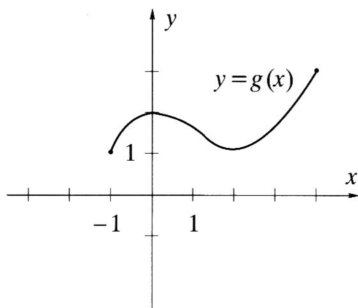
$NO + C_{20}H_{12} \longrightarrow N_2 + CO_2 + H_2O$.

7 skyriaus užduotys

701. Sudarykite x ir y reikšmių lentelę ir nubraižykite funkcijos $f(x) = 8 - x$ grafiką, jei jos apibrėžimo sritis $X(f) = [-2; 6]$. Nurodykite funkcijos reikšmių sritį.

702. Piešinėliuose pavaizduoti funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikai. Nurodykite $X(f)$ bei $X(g)$ ir $Y(f)$ bei $Y(g)$.





703. Galime įsivaizduoti, kad kišeninio skaičiuoklio mygtukai įjungia funkcijų mašinas.

a) Sudarykite x ir $f(x)$ reikšmių lentelę, kai $f(x) = x^2$. Funkcijos argumento reikšmėmis imkite visus sveikuosius skaičius nuo -5 iki 5. Jums tereikia paspausti atitinkamų skaičių mygtukus, po to – x^2 mygtuką. Pagal lentelės duomenis nubraižykite grafiką.

b) Panašią lentelę sudarykite funkcijai $\sqrt{x}$, tačiau čia x reikšmes galite imti tik teigiamas arba lygią nuliui.

704. Nedidelis 20 žodžių skelbimas laikraštyje kainuoja 40 Lt. Nuo 20 kiekvienas naujas žodis papildomai kainuoja 3 litus.

a) Užpildykite lentelę, kuri rodytų, kiek kainuotų išspausdinti skelbimą nuo 21 iki 31 žodžių.

b) Nubraižykite grafiką, kuris rodytų, kiek kainuoja skelbimas nuo 1 iki 40 žodžių.

705. Piešinėlyje pavaizduotas funkcijos f grafikas.

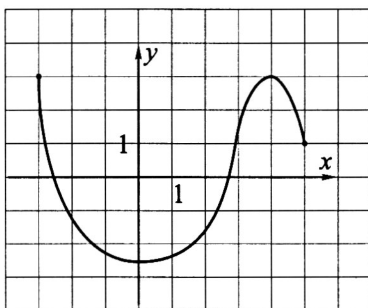
a) Raskite $f(-2)$ ir $f(1)$.

b) Nustatykite funkcijos f apibrėžimo ir funkcijos reikšmių sritis.

c) Išspręskite lygtį $f(x) = 2$.

d) Raskite funkcijos didžiausią ir mažiausią reikšmes (maksimumą ir minimumą).

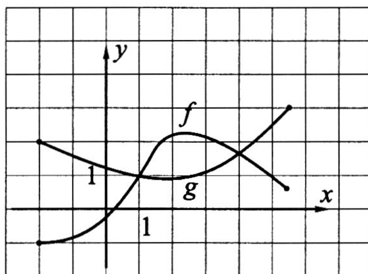
e) Nustatykite funkcijos didėjimo bei mažėjimo intervalus.



706. Paveikslėlyje pavaizduoti dviejų funkcijų f ir g grafikai.

a) Raskite, su kuriomis x reikšmėmis $f(x) = g(x)$.

b) Nurodykite funkcijų f ir g apibrėžimo ir reikšmių sritis.

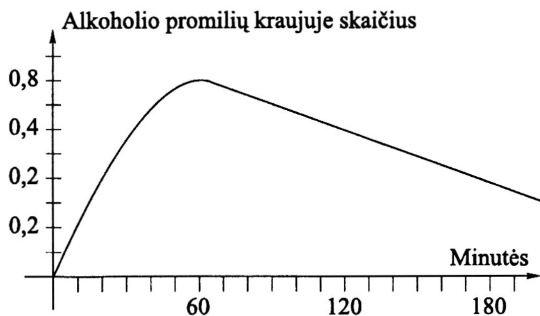


707. Žmogaus, išgėrusio tris butelius alaus, kraujuje esančio alkoholio kiekio (promilėmis) priklausomybė nuo laiko parodyta grafike (žr. kt. puslapį).

a) Nurodykite intervalus, kuriuose alkoholio kiekis didėja bei mažėja, ir pamėginkite paaiškinti, kodėl taip yra.

b) Kiek laiko praėjus nuo išgėrimo promilių skaičius yra maksimalus? Kokiais laiko momentais alkoholio promilių yra 0,4? Kiek laiko praeina, kol alkoholis kraujuje išnyksta?

c) Kiek promilių alkoholio kiekis sumažėja per valandą?

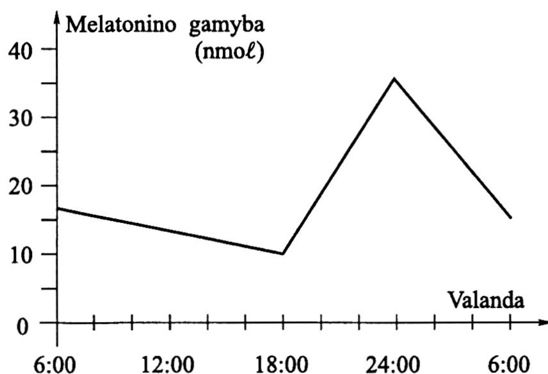


708. Grafike atvaizduota, kaip žmogaus organizme per parą gaminasi melatoninas (nmol).

a) Nurodykite tuos intervalus, kuriuose melatonino gamyba organizme didėja, ir kuriuose mažėja.

b) Nurodykite, kuriuo metu melatonino gamyba didžiausia ir kuriuo – mažiausia.

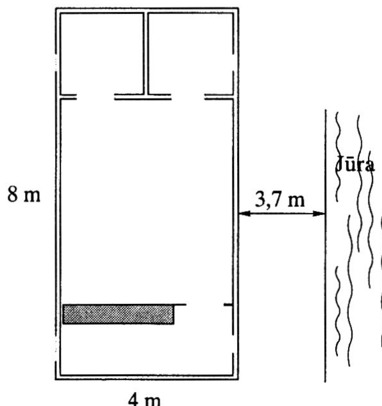
c) Nurodykite apibrėžimo ir reikšmių sritis.



709. Namas ant skardžio

Įsivaizduokite, kad gavote tokį laišką:

1985 m. vasarą ponia Vasaraitienė Giruliuose, pajūryje ant skardžio pasistatydino vasarnamį. Per vasaros atostogas 1990 m. ji išmatavo, kad atstumas nuo namo sienos iki skardžio krašto – 2 m 85 cm. Kadangi skardį kasmet paplauna jūra, ponia Vasaraitienė susirūpino, kad jos namas vieną dieną nenugarmėtų žemyn. Todėl ji susirado namo brėžinius, tarp kurių buvo ir šis, darytas 1985 metais. Ji ketino vėl išmatuoti tą atstumą 1996 m. vasarą. Kaip toli namas bus nuo skardžio krašto? Kada jis turėtų nugarmėti į jūrą, jei vanduo kasmet vienodai paplauna skardį?



a) Sudarykite lentelę, kokie tikėtini atstumai iki skardžio krašto 1985–1996 metais. Paaiškinkite, kokiomis prielaidomis rėmėtės sudarydami lentelę.

b) Nubraižykite grafiką, kuris rodytų atstumą iki krašto kaip namo amžiaus (metais) funkciją.

c) Užrašykite atstumo y kaip funkcijos nuo metų, ponios Vasaraitienės gyventų vasarnamyje, lygtį. Kokia funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritis?

d) Paaiškinkite, kokiomis prielaidomis rėmėtės savo modelyje.

710. Nubraižykite šių funkcijų grafikus:

a) $$f(x) = \begin{cases} -2 \cdot x + 6, & \text{kai } x \leqslant 3; \\ 1/2 \cdot x - 3/2, & \text{kai } x > 3; \end{cases}$$

b) $$g(x) = \begin{cases} 5 \cdot x, & \text{kai } x \leqslant 0; \\ -2 \cdot x, & \text{kai } x > 0. \end{cases}$$

Funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ vadinamos dalimis tiesinėmis.

711. Jonas dirba „Nijolės“ kirpykloje. Apsikirpti čia kainuoja 10 litų. Po darbo dienos šeimininkė Jonui už pirmuosius 4 kirpimus moka po 5 Lt, už kitus 4 kirpimus – po 6 Lt, toliau – po 7,5 Lt už kiekvieną kirpimą.

Jonas nutarė paklausti šeimininkės, ar jie negalėtų pakeisti darbo sutarties taip, kad už kiekvieną kirptą klientą Jonas gautų po 6 Lt. Kaip manote, ar šeimininkė sutiks pakeisti darbo sutarties sąlygas?

a) Užpildykite lentelę, kuri atspindėtų Jono viso dienos uždarbio $f(x)$ priklausomybę nuo jo per dieną kirptų klientų skaičiaus x. Sudarykite kitą lentelę, kuri rodytų Jono uždarbį $g(x)$ per dieną naujos sutarties sąlygomis. Palyginkite lenteles ir pakomentuokite.

b) Nubraižykite funkcijos f grafiką. Nurodykite apibrėžimo ir reikšmių sritis.

c) Nubraižykite funkcijos g grafiką tame pačiame milimetrinio popieriaus lape kaip ir f. Pakomentuokite.

d) Užrašykite funkcijos $g(x)$ formulę.

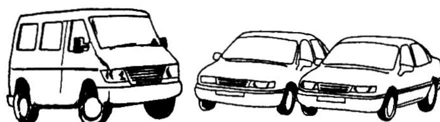
e) Jeigu Jonas per dieną kirptų tik po 9 klientus, ar nevertėtų šeimininkei pakeisti sutarties sąlygas?

f) Jeigu Jonas kirptų nuo 13 iki 16 klientų per dieną, ar apsimokėtų šeimininkei pakeisti sutarties sąlygas? Kiek klientų kerpant abu apmokėjimo variantai būtų daugmaž lygiaverčiai?

g) Jei kiekvienas klientas Jonui duotų po 1 litą arbatpinigių, kokios tai turėtų įtakos lentelėms, grafikams ir lygtims?

712. Draugų kelionė

Aštuoni archeologų draugijos nariai planuoja dviejų savaičių kelionę po Lietuvą, kad susipažintų su praeities paminklais. Kadangi draugijos ištekliai riboti, keliauninkai iš anksto turi sudaryti kelionės biudžetą, todėl jie nutaria tirti kelionės galimybes.



I. Jie galėtų pasinaudoti ypatingu pasiūlymu ir išsinuomoti du nedidelius automobilius. Tada pasiimdami automobilius jie sumoka po 960 litų už automobilį ir gali jais naudotis iki 14 dienų. Taigi išsinuomoti automobilį 1 dienai ir 14 dienų kainuoja tiek pat. Benzinas ir tepalai vienam automobiliui kainuos 48 Lt per dieną. Vienam asmeniui per dieną reikėtų 12 Lt maistui ir 20 Lt nakvynei.

a) Kiek kainuotų draugijai viena kelionės para (nakvynė, maistas, benzinas, tepalai ir transportas)? Kiek kainuotų 5 paros?

b) Sudarykite $1, 2, 3, \dots, 14$ parų bendrų išlaidų lentelę.
Sąskaitininkas paprašė nubraižyti grafiką, kuriuo remdamasis jis galėtų suskaičiuoti bendras išlaidas iki bet kurios kelionės dienos.

c) Ką atidėsite ašyse ir kokius vartosite vienetus?

d) Ar grafikas atrodo kaip tolydi kreivė, paskiri taškai ar kas nors kita? Paaiškinkite, kodėl.

II. Paaiškėjo, kad yra kita galimybė, kuri galbūt padarys kelionę įdomesnę ir pigesnę. Galima išsinuomoti mikroautobusą, kuriame telpa visi aštuoni draugijos nariai. Jame yra šaldytuvas. Kaina – 16,20 Lt valandai. Ši suma kas dieną atskaitoma iš draugijos sąskaitos banke. Benzinas ir tepalai kainuotų 129 Lt dienai. Kadangi maistą galima pasigaminti patiems ir laikyti šaldytuve, žmogui per dieną reikėtų tik 6 Lt maistui ir 20 Lt nakvynei.

a) Kiek kainuotų draugijai viena kelionės para (nakvynė, maistas, transportas ir jo degalai)? Kiek kainuotų 5 paros?

b) Sudarykite $1, 2, 3, \dots, 14$ parų kelionės bendrų išlaidų lentelę.

c) Draugijos sąskaitininkas grąžino nubrėžtąjį grafiką ir paprašė papildyti jį informacija apie tai, kokios būtų bendros išlaidos nuomojantis mikroautobusą. Panaudodami kitą spalvą, nubrėžkite bendrųjų išlaidų grafiką.

d) Kuris iš dviejų pasiūlymų pigesnis, planuojant 14 dienų kelionę?
Kaip sąskaitininkui tai atspindės jūsų grafikai? Kokį keliavimo būdą pasirinktumėte jūs? Atsakymą pagrįskite.

e) Jeigu kelionė truktų tik savaitę, ar atsakymas į d) klausimą būtų toks pat? Jei ne, paaiškinkite kodėl.

f) Vienas draugijos narys teigia, kad tam tikru momentu išlaidos abiem atvejais turėtų susilyginti. Ar tai tiesa? Atsakymą pagrįskite.

g) Kad padėtų draugijai ir kad paakintų draugijos narius domėtis matematika, fondas pasiūlo paramą kelionei – po 60 Lt kiekvienam nariui, nurodančiam būdą, kaip rasti (dienos šimtosios dalies tikslumu) tą momentą, kada išlaidos abiem atvejais susilygins.
Nurodykite tokį būdą.

713. Tiesę $y = 2x$ gauname ištempę su koeficientu 2 grafiką $y = x$ ašies y kryptimi. Paaiškinkite, kodėl šis ištempis atitinka ištempį x ašies kryptimi su koeficientu 1/2. Nubraižykite funkcijos $y = 2x$ grafiką.

714. Tiesę $y = x + 2$ gauname lygiagrečiai pastūmę $y = x$ grafiką y ašies kryptimi per 2 vienetus. Paaiškinkite, kodėl lygiagretusis postūmis y ašimi per 2 vienetus atitinka lygiagretųjį postūmį x ašimi per -2.

715. Nurodykite ne mažiau kaip du skirtingus būdus, kaip naudojantis 153 p. pateiktomis keturiomis transformacijomis būtų galima iš grafiko $y = x$ gauti $y = 2x + 3$ grafiką.

716. Nubraižykite toje pačioje koordinačių sistemoje šių funkcijų grafikus: $y = x^2$ ir $y = (x - 3)^2 + 2$. Nurodykite grafikų simetrijos ašis ir viršūnių taškus.

717.

a) Toje pačioje koordinačių sistemoje nubraižykite šių funkcijų grafikus:

$$y = x^2, \qquad y = 2 \cdot x^2 + 3, \qquad y = 2 \cdot (x-1)^2 + 3.$$

Nurodykite grafikų simetrijos ašis ir viršūnių taškus.

b) Nurodykite šių keturių parabolių viršūnių taškus bei simetrijos ašis ir toje pačioje koordinačių sistemoje nubraižykite jų grafikus:

$$f(x) = 2 \cdot (x-3)^2, \qquad g(x) = 2 \cdot (x-3)^2 + 4,$$
$$s(x) = -2 \cdot (x-3)^2, \qquad t(x) = 2 \cdot (x+3)^2.$$

718. Rėmelis

Tarkime, kad turime 50 cm ilgio strypą ir iš jo norime padaryti stačiakampį rėmelį. Ar visų rėmelių, kuriuos galima padaryti, plotai vienodi? Jei ne, ar yra maksimalus plotas? Minimalus plotas? Panagrinėkite šią problemą ir atsakykite į tokius klausimus:

a) Kam lygu $h + b$?

b) Kokiose ribose gali būti kraštinių b ir h ilgiai?

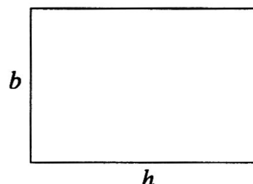
c) Parašykite formulę rėmelio plotui A apskaičiuoti.

d) Sudarykite susijusių b, h ir A reikšmių lentelę.

e) Užrašykite A kaip b arba h funkcijos lygtį.

f) Nubraižykite šios funkcijos grafiką.

g) Kokia tai funkcija?

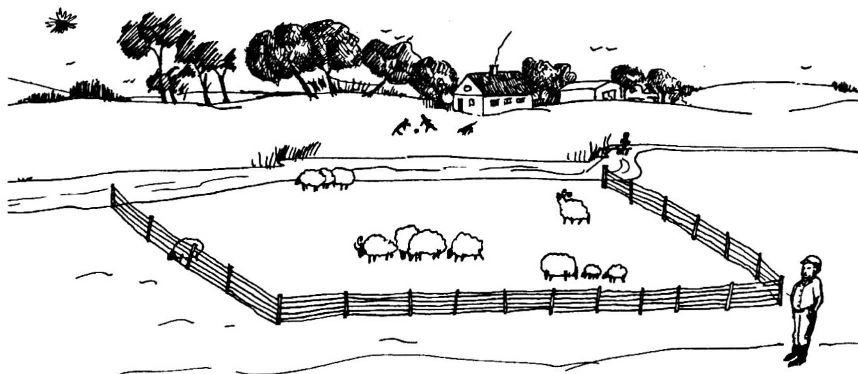


719. Aptvaras

Avių augintojui Jonui reikia aptverti naują gardą avims. Jo žeme teka upelis, ir norėdamas sutaupyti, Jonas nusprendžia pasinaudoti upeliu kaip viena stačiakampio aptvaro kraštine. Jonas turi medžiagos 1000 m ilgio tvorai.

Kokio ilgio stačiakampio gardo kraštines jam reikėtų pasirinkti, kad aptvertas plotas būtų kuo didesnis?

Atsakymą pagrįskite lentele, grafiku ir formule.



720. Kino teatro problema

Į kino teatrą „Rytas“, kai bilieto kaina būna 10 Lt, vakarais vidutiniškai susirenka 300 žmonių. Kainą sumažinus 1 Lt, publikos pagausėja 15 žiūrovų. Kino teatro salėje yra 450 vietų.

Kino teatro savininkas nori sužinoti bilieto kainą, kuri atneštų didžiausią pelną.

Ar nepadėtumėte jam išspręsti šią problemą? Atsakymą pagrįskite lentele, grafiku ir funkcijos formule. (Patarsime: lentelėje, pavyzdžiui, galėtų būti bilietų kaina (k), žiūrovų kino teatre skaičius (n) ir pelnas (P).)

721. Obuolių sodas

Obuolių sodo savininkė įsitikino, kad augindama 25 obelis, nuo kiekvieno medžio kasmet gauna vidutiniškai 500 obuolių derlių. Sodą padidinus vienu medžiu, derlius sumažėja po 10 obuolių nuo kiekvieno medžio. Savininkė nori gauti kuo didesnį obuolių derlių.

a) Kiek obelų jai reikėtų auginti savo sode?

b) Koks tuomet būtų obuolių derlius?

Atsakymą iliustruokite lentele, grafiku ir funkcijos formule.

722. Perrašykite šiuos antrojo laipsnio polinomus tokiu pavidalu: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

$$f(x) = 4 \cdot (x - 5)^2 + 3 \quad \text{ir} \quad g(x) = 2 \cdot (x + 4)^2 + 1.$$

Nurodykite parabolių viršūnių taškus ir simetrijos ašis.

723. Nurodykite šių parabolių viršūnių taškus bei simetrijos ašis ir nubraižykite grafikus:

$$y = 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 5 \quad \text{ir} \quad y = -2 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 14.$$

724. Perrašykite šiuos antrojo laipsnio polinomus pavidalu: $a \cdot (x - h)^2 + k$ ir nurodykite parabolių viršūnių taškus bei simetrijos ašis:

$$f(x) = x^2 - 4 \cdot x + 1 \quad \text{ir} \quad g(x) = x^2 + 6 \cdot x + 16.$$

725. Prisiminkite, kaip įvairios transformacijos (lygiagretieji postūmiai, ištempiai vertikalia bei horizontalia kryptimi) keičia pradinę funkciją.

Jei naudojatės kokia nors grafikams braižyti skirta kompiuterio programa, nubrėžkite, pavyzdžiui, funkcijos $y = x^2$ grafiką, o po to, pasirinkę įvairias a, h, k reikšmes, – $y = a \cdot (x-h)^2 + k$ grafikus. Jei neturite tinkamų kompiuterio programų, pasinaudokite metodais taikomais 7 skyriaus pratimuose.

726. Ryšys tarp pirmojo ir antrojo laipsnio daugianarių

Šios užduoties klausimus galite tyrinėti tiek naudodamiesi kompiuteriu, tiek ir be jo.

I. Nubrėžkite toje pat koordinačių sistemoje funkcijų $f(x) = 2 \cdot x - 4$ ir $g(x) = -2 \cdot x + 2$ grafikus, kai $-5 \leqslant x \leqslant 5$.

   a) Raskite abiejų grafikų susikirtimo su koordinačių ašimis taškus.

   b) Raskite abiejų tiesių krypties koeficientus. Sudarykite funkcijos $h(x) = f(x) + g(x)$ formulę ir nubraižykite šios funkcijos grafiką.

   c) Raskite funkcijos $y = h(x)$ grafiko (tiesės) krypties koeficientą ir kirtimosi su koordinačių ašimis taškus.

   d) Koks tiesių $y = f(x)$, $y = g(x)$ ir $y = h(x)$ krypties koeficientų ryšys?

II. Sudarykite funkcijos $k(x) = f(x) \cdot g(x)$ formulę. Kokia tai funkcija?

   a) Nubraižykite funkcijos $y = k(x)$ grafiką (jei braižote ant popieriaus, pravartu peržvelgti skyrelį „Antrojo laipsnio daugianario grafikas“).

b) Raskite $y = k(x)$ kirtimosi su koordinačių ašimis taškus.

c) Kaip susiję funkcijų $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = k(x)$ kirtimosi su koordinačių ašimis taškai?

d) Kokiame taške yra funkcijos $y = k(x)$ grafiko viršūnė?

e) Kaip viršūnės padėtis susijusi su funkcijomis $y = f(x)$, $y = g(x)$?

f) Kaip orientuotos parabolės $y = k(x)$ šakos? Kokia parabolės koeficiento a reikšmė?

g) Kaip buvo galima numatyti parabolės šakų kryptį ir koeficiento a reikšmę iš funkcijų $y = f(x)$, $y = g(x)$ išraiškų?

III. Atsakykite į I ir II dalių klausimus, kai $f(x) = -2 + 2$, $g(x) = -3 \cdot x + 2$.

IV. Ar visas paraboles galima gauti braižant dviejų pirmojo laipsnio daugianarių sandaugos grafikus? Atsakymą pagrįskite.

V. Nubraižykite funkcijos $y = x^2 + x - 12$ grafiką, kai $-5 \leqslant x \leqslant 5$.

a) Raskite parabolės viršūnę ir kirtimosi su koordinačių ašimis taškus.

b) Ar daugianarį $y = x^2 + x - 12$ galima užrašyti dviejų pirmojo laipsnio daugianarių sandauga? Jei taip, pabandykite juos rasti.

727. Hiperbolė

Šioje užduotyje patyrinėsime funkcijos $y = 1/x$ grafiką. Nubrėžkite jį, sujungę tolydžia linija taškus su $x = 1/10,\ 1/5,\ 1/2,\ 1,\ 2,\ 5,\ 10$; po to imkite $x = -1/10,\ -1/5,\ -1/2,\ -1,\ -2,\ -5,\ -10$ ir nubrėžkite kitą grafiko šaką. Kas atsitinka, kai imame labai dideles x reikšmes? Labai mažas x reikšmes? Funkcijos $y = 1/x$ grafikas vadinamas hiperbole. Pamąstykite, kodėl ją sudaro dvi simetriškos koordinačių pradžios taško atžvilgiu šakos. Kai nagrinėjame hiperbolės taškus su labai didelėmis arba mažomis (tačiau nelygiomis 0) x koordinatėmis, hiperbolė artėja prie tiesių (koordinačių sistemos ašių). Šios tiesės vadinamos hiperbolės asimptotėmis.

Dabar patyrinėkite, kas atsitinka, kai $y = 1/x$ grafiką ištempiame su koeficientu a, pastumiame x ar y ašies kryptimi per h. Nubraižykite funkcijų

$$y = \frac{2}{x}, \quad y = \frac{1}{2x}, \quad y = \frac{1}{x-1}, \quad y = \frac{1}{x-1} + 1$$

grafikus. Jie taip pat vadinami hiperbolėmis. Jei naudojatės kompiuterio programa, pasirinkite daugiau ištempio bei postūmių koeficientų reikšmių ir nubraižykite atitinkamus grafikus.

728. Pirmojo laipsnio daugianarių dalyba

Imkite du pirmojo laipsnio daugianarius $f(x) = 2 \cdot x + 3$, $g(x) = x - 1$ ir sudarykite naują funkciją $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

a) Įsitikinkite, kad funkcijos

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2 \cdot x + 3}{x - 1}, \quad y = \frac{5}{x-1} + 2$$

yra tapačios.

b) Nubraižykite šios funkcijos grafiką, naudodamiesi tokia $y = 1/x$ grafiko transformacijų seka:

$$\frac{1}{x} \xrightarrow[\text{lygiagretus postūmis } x \text{ ašies kryptimi}]{} \frac{1}{x-1} \xrightarrow[\text{ištempis } y \text{ ašies kryptimi}]{} \frac{5}{x-1} \xrightarrow[\text{lygiagretus postūmis } y \text{ ašies kryptimi}]{} \frac{5}{x-1} + 2$$

c) Paaiškinkite, kas būdinga funkcijos $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ grafikui. Ar jis turi simetrijos tašką? Koks jis? Kokios yra šios hiperbolės asimptotės?

729. Trupmeninės funkcijos

Pabandykite nubrėžti šių trupmeninių funkcijų grafikus.

a) $g(x) = \frac{4 \cdot x + 2}{x - 0,5}$; b) $f(x) = \frac{4 \cdot x + 2}{-x - 0,5}$; c) $h(x) = \frac{2 \cdot x - 4}{4 \cdot x - 7}$.

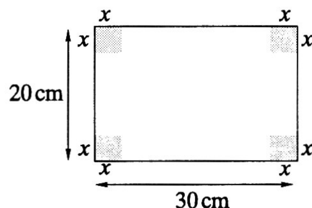
Prieš brėždami pertvarkykite funkcijas pagal tokį skaičiavimo pavyzdį:

$$g(x) = \frac{4 \cdot x + 2}{x - 0,5} = \frac{4 \cdot x - 4 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,5 + 2}{x - 0,5} = \frac{4 \cdot (x - 0,5) + 4}{x - 0,5} = 4 + \frac{4}{x - 0,5}.$$

Pertvarkę funkcijų išraiškas, nustatykite, kurių funkcijų grafikai yra hiperbolės, o kurių ne. Paaiškinkite kodėl. Kokias transformacijas reikia atlikti su $y = 1/x$ grafiku, kad gautumėte atitinkamų hiperbolių grafikus? Nurodykite hiperbolės simetrijos taškus bei asimptotes.

730. Talpiausia dėžutė

Įsivaizduokite, kad turite gabalą skardos (20 cm × 30 cm) ir jums reikia padaryti dėžutę – išpjauti iš kampų kvadratėlius ir užlenkti kraštus į viršų, kad šie sudarytų sieneles (dėžutė bus be dangtelio). Kad geriau įsivaizduotumėte užduotį, pamėginkite išlankstyti tokią dėžutę iš A4 formato popieriaus lapo.



Mūsų tikslas – nustatyti, kokius kvadratėlius reikia išpjauti, kad dėžutės tūris V būtų maksimalus. Dėžutės tūris yra $V = l \cdot b \cdot h$, kur l – ilgis, b – plotis, ir h – aukštis.

a) Prieš pradėdami skaičiuoti, pamėginkite įvertinti, koks, jūsų manymu, turi būti x, kad tūris būtų maksimalus. Spėjimą užsirašykite.

b) Nurodykite, kokios gali būti kintamųjų l, b, ir h didžiausios ir mažiausios reikšmės.

c) Sudarykite kintamųjų lentelę.

d) Nubraižykite V kaip funkcijos nuo x grafiką. Ar funkcija turi maksimumą arba minimumą?

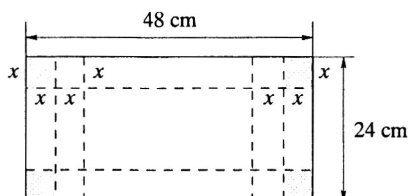
e) Nurodykite, su kokia x reikšme tūris yra didžiausias, ir raskite jį.

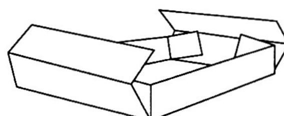
f) Pagaminkite iš popieriaus didžiausio tūrio dėžutę. Padarykite ir kitų dėžučių su mažesnėmis ir didesnėmis x reikšmėmis.

g) Užrašykite V kaip x funkcijos išraišką.

731. Sutvirtinta dėžutė

Sutvirtintą dėžutę galima pasigaminti, iš stačiakampio kartono lapo (matmenys 24 cm × 48 cm) kampų išpjovus vienodus kvadratėlius (kurių kraštinės x). Tuomet kartono lapas sulankstomas, kaip pavaizduota paveikslėlyje. Nustatykite, kokių matmenų turi būti dėžutė, kad jos tūris būtų didžiausias. Sprendimą iliustruokite lentele, formule ir grafiku. Nurodykite kintamojo x apibrėžimo sritį. Pasigaminkite dėžutės modelį.





732. Vandens malūnas

Vandens malūno naudingumas y aprašomas formule $y = 0{,}5 \cdot x \cdot (v - x)^2$; čia v yra vandens srovės tekėjimo greitis, o x – vandens rato sukimosi greitis. Kad pasinaudotume vandens galia, turi būti $0 < x < v$. Tarkime, v lygu 1,25 m/s, 2,5 m/s, 3,0 m/s ir 6,0 m/s.

a) Kiekvienai v reikšmei raskite tokį vandens rato sukimosi greitį, kuriam esant malūno naudingumas būtų maksimalus.

b) Praplėskite funkcijos apibrėžimo sritį ir panagrinėkite grafikus. Kokia tai funkcija? Koks jos prototipas?

733. Laipsninės funkcijos

a) Nusibrėžkite paprastų laipsninių funkcijų grafikus (pavyzdžiui, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$, $y = x^6$). Jei naudojatės kompiuteriu, galėsite greitai gauti tikslius brėžinius. Jei turite tik languoto popieriaus lapą, imkite x reikšmes -2, -1, $-1/2$, 0, $1/2$, 1, 2 ir kiek galima tiksliau atidėję taškus, sujunkite juos tolydžia kreive. Aprašykite kiekvienos jų būdingas ypatybes. Palyginkite jų formą, statumą ir t. t. Pabandykite numatyti, kaip atrodytų funkcijos $y = x^{11}$ grafikas.

b) Paaiškinkite, kokias transformacijas atlikus, iš $y = x^5$ grafiko galima gauti funkcijos $y = 2 \cdot (x - 3)^5 - 3$ grafiką.

734.

a) Sudarykite pirmojo laipsnio daugianario $f(x) = 3 \cdot x + 5$ pirmojo ir antrojo skirtumų lentelę. Tegu x kinta nuo 0 iki 10 žingsniu 1.

b) Užpildykite analogišką tos pačios funkcijos lentelę, kur x kistų nuo 0 iki 20 žingsniu 2.

c) Palyginkite a) ir b) lenteles. Pakomentuokite.

735. Sudarykite lentelę su bendrojo pavidalo pirmojo laipsnio daugianario $f(x) = a \cdot x + b$ pirmuoju ir antruoju skirtumais. Tarkime, x kinta nuo 0 iki 10 žingsniu 2. Kokią galima iš lentelės padaryti išvadą?

736. Sudarykite lentelę su funkcijos $f(x) = 2 \cdot x^2 + 3$ pirmuoju, antruoju ir trečiuoju skirtumais.

a) Tegu x kinta nuo 0 iki 10 žingsniu 1.

b) Tegu x kinta nuo 0 iki 20 žingsniu 2.
Palyginkite lenteles ir pakomentuokite rezultatus.

737. Sudarykite lentelę, kur būtų apskaičiuota funkcijos $f(x) = x^3$ pirmoji, antroji ir trečioji išvestinės.

a) Tegu x kinta nuo 0 iki 10 žingsniu 1. Kokia išvada?

b) Tegu x kinta nuo 0 iki 20 žingsniu 2. Kokia išvada?
Palyginkite lenteles ir pakomentuokite rezultatus.

738. Užpildykite lentelę su funkcijos $f(x) = x^4$ pirmuoju, antruoju, trečiuoju ir ketvirtuoju skirtumais, kai x kinta nuo 0 iki 16 žingsniu 1. Kokią galima iš lentelės padaryti išvadą?

739. Skirtumų formulės

Funkcijos $f(x)$ skirtumai apibrėžiami lygybėmis:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x);$$
$$\Delta\Delta f(x) = \Delta f(x+1) - \Delta f(x);$$
$$\Delta\Delta\Delta f(x) = \Delta\Delta f(x+1) - \Delta\Delta f(x);$$
$$\Delta\Delta\Delta\Delta f(x) = \Delta\Delta\Delta f(x+1) - \Delta\Delta\Delta f(x).$$

Įrašę į šias lygybes atitinkamas išraiškas, sudarykite skirtumų formules šioms funkcijoms:

a) $f(x) = 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 5$;

b) $f(x) = 2 \cdot x^3 + 3 \cdot x + 5$;

c) $f(x) = 3 \cdot x^4 + 2 \cdot x^2 + 1$;

d) $f(x) = 3 \cdot x^5$;

e) $f(x) = 2 \cdot x$.

Pakomentuokite gautas formules.

740. Iš lentelių išsiaiškinkite, kokių tipų yra šios funkcijos:

a)

x	y
2	−1
4	−5
6	−9
8	−13
10	−17
12	−21
14	−25

b)

x	y
2	−1
4	−5
6	−11
8	−19
10	−29
12	−41
14	−55

c)

x	y
1	2
2	16
3	54
4	128
5	250
6	432
7	686

741. Atliekant fizikos bandymą, leidžiama laisvai kristi kūnui. Bandymo tikslas – nustatyti, kaip kritimo kelias s priklauso nuo kritimo laiko t. Atlikę bandymą, mokiniai nustatė:

t (s)	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70
s (m)	0,050	0,195	0,440	0,788	1,238	1,788	2,418

Ištirkite, ar galima kūno laisvąjį kritimą aprašyti daugianariu ir jeigu taip – kokio laipsnio. Nubraižykite (t, s) grafiką.

742. Gamykloje gaminama tam tikra prekė. Lentelėje x reiškia pagamintos produkcijos vienetų skaičių, o $f(x)$ – dienos sąnauda x produkcijos vienetams pagaminti. Jums reikia sudaryti dienos sąnaudų kaip funkcijos nuo pagamintų produkcijos vienetų skaičiaus formulę. Ištirkite, ar dienos sąnaudoms apskaičiuoti tinka daugianaris ir jeigu taip, tai kokio laipsnio. Nubraižykite $f(x)$ grafiką ir sudarykite $f(x)$ formulę.

x	0	10	20	30	40
$f(x)$	250	1750	3250	4750	6250

743. Lauke, kur sodinami medžiai, pastebėta, kad pasodinus iki 16 medžių, jie išauga po 1 metrą per metus. Pasodinus 1 medžiu daugiau, kiekvieno medžio augimas sulėtėtėja 5 cm per metus ir t. t. Kiek medžių reikia pasodinti, kad metinis prieaugis būtų didžiausias?

a) Sudarykite medžių skaičiaus n ir bendro metinio prieaugio $v(n)$ lentelę. Ištirkite, ar šiam sąryšiui aprašyti tinka daugianaris.

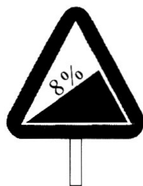
b) Nubraižykite $(n; v(n))$ grafiką. Nurodykite galimus grafiko viršūnės taškus.

c) Užrašykite v kaip funkcijos nuo n formulę.

8 skyriaus užduotys

801. Naudodamiesi piešinėliu 166 puslapyje, raskite kampų $0°, 10°, 20°, 30°, \dots, 90°$ sinusus ir kosinusus. Nustatytas reikšmes surašykite lentelėje.

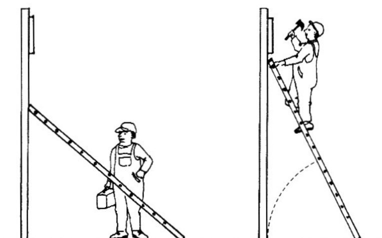
802. Raskite kampų iš 801 užduoties sinusų ir kosinusų reikšmes, naudodamiesi skaičiuokliu. Ar šios reikšmės atitinka jūsų matavimus?



803. Kelio ženklas rodo 8 procentų statumo įkalnę. Kokį kampą sudaro kelias su horizontalia linija? Kas būtų parašyta ant ženklo, jei kelias su horizontale sudarytų 8 laipsnių kampą?

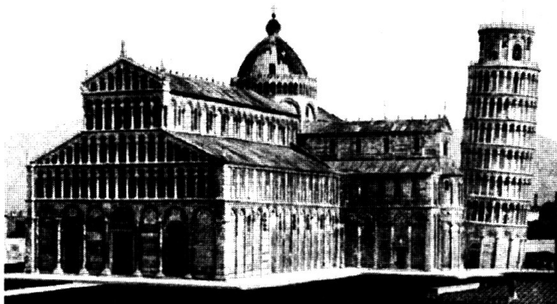
804. 300 m ilgio kelio atkarpa sudaro 4 laipsnių kampą su horizontalia linija. Kiek metrų pakyla kelias?

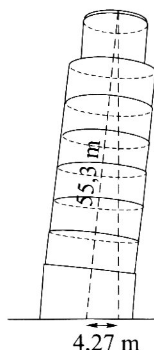
805. Namų ūkio patarimų knygoje rašoma: atstumas nuo kopėčių atsparos taško iki sienos turi sudaryti maždaug 1/3 kopėčių ilgio. Kokiu kampu į grindis rekomenduojama atremti kopėčias? Piešinėlyje kopėčios yra 5,2 metrų ilgio ir darbininkas jas pastatė laikydamasis patarimo. Kokiame aukštyje virš grindų yra kopėčių viršus?



806. Pizos bokštas yra 55,3 m aukščio ir 4,27 m nukrypęs nuo vertikalės (žr. pav.). Apskaičiuokite, kokį smailųjį kampą bokštas sudaro su vertikale (pasvirimo kampą).

Bokštas ne visuomet buvo taip pasviręs kaip dabar. Kiek metrų buvo bokštas nukrypęs nuo vertikalės, kai jo pasvirimo kampas buvo $1°$?

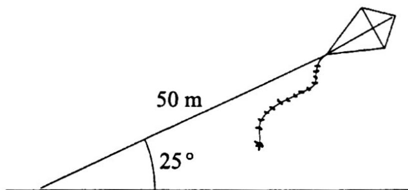




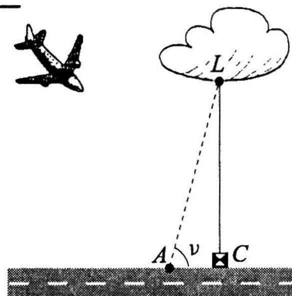
807. Trikampis ABC yra statusis, jo kampas $C = 90°$. Apskaičiuokite kitas kraštines ir kampus, kai:

a) $a = 2$ ir $c = 5$; b) $A = 41°$ ir $b = 4{,}8$; c) $B = 20°$ ir $c = 20$.

808. 50 m ilgio aitvaro virvutė su žemės paviršiumi sudaro 25 laipsnių kampą.
Kokiame aukštyje skrieja aitvaras?



809. Oro uoste, kaip pavaizduota piešinėlyje, matuojamas debesų aukštis virš Žemės. Taške C yra šviesos šaltinis, kuris siunčia šviesos spindulį vertikaliai į viršų, todėl debesyje susidaro šviesos dėmė L. Taške A, kuris yra 250 m atstumu nuo C, stovi prietaisas, matuojantis kampą ν.

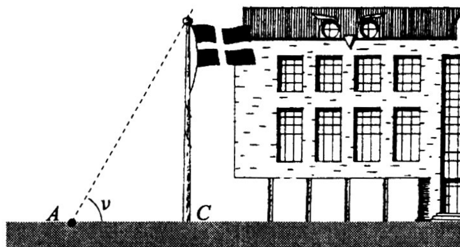


a) Apskaičiuokite, kokiame aukštyje kybo debesys, jei išmatuotas kampas ν lygus 75 laipsniams.

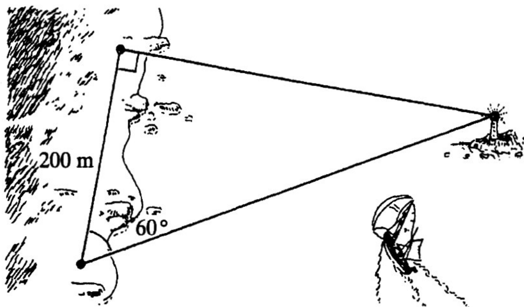
b) Apskaičiuokite kampą ν, kai debesys yra 300 m aukštyje.

810. Prie Danijos mokyklų, kaip ir prie daugelio namų, plevėsuoja Danijos vėliavos. Norėdami nustatyti savo mokyklos vėliavos stiebo aukštį, moksleiviai išmatavo stiebo šešėlio ilgį. Jie nustatė, kad šešėlis $AC = 2{,}9$ m.

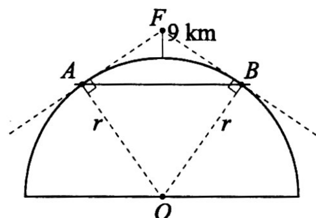
Koks vėliavos stiebo aukštis, jei saulė virš horizonto matoma 60° kampu (kampas ν)?



811. Jūroje stūkso uola su švyturiu, įspėjančiu laivus neplaukti pernelyg arti. Kaip toli nuo kranto yra uola?



812. NATO ginkluotėje yra lėktuvų AWACS. Tai skriejančios radiolokacijos stotys. Skriejanti radiolokacijos stotis, lyginant su įrengta ant žemės, turi tą privalumą, kad iš jos galima stebėti lėktuvus, kurie dėl Žemės kreivumo ar vietovės reljefo būtų nematomi.



Žemės pjūvis (proporcijos neatitinka tikrovės).

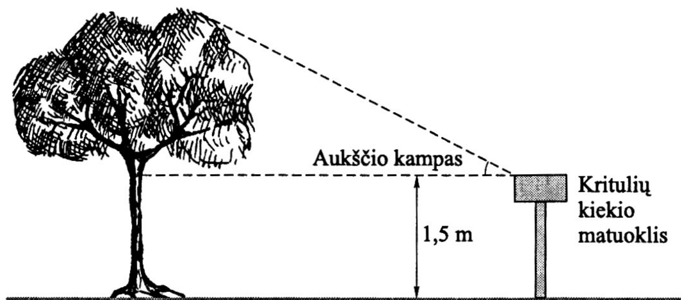
AWACS lėktuvas skrenda 9 km aukštyje – piešinėlyje jį atitinka taškas F. Taškai A ir B žymi tolimiausius taškus, kuriuos siekia lėktuvo radaras. Žemės spindulį laikome lygiu 6371 km. Kampai $\angle OAF$ ir $\angle OBF$ yra statūs, kadangi liestinės statmenos spinduliams.

a) Kokio ilgio yra FO, FA ir FB?

b) Kokio dydžio yra centriniai kampai $\angle FOA$ ir $\angle FOB$?

c) Kokio ilgio yra apskritimo lankas AB, t. y. kiek siekia AWACS lėktuvo radarai?

813. Kritulių kiekio matuoklis įtaisomas už priedangos taip, kad krintančių lašų trajektorija kuo mažiau priklausytų nuo vėjo stiprumo. Bandymai parodė, kad geriausią priedangą matuokliui sudaro augalija, o aukščio kampas, matuojant nuo prietaiso viršaus iki medžių viršūnių, esti nuo 15 iki 30 laipsnių.



Taip apibrėžiamas kritulių kiekio matuoklio aukščio kampas priedangos atžvilgiu.

a) Kokiu atstumu nuo 15 m aukščio medžio reikia įtaisyti kritulių kiekio matuoklį, kad aukščio kampas būtų nuo 15° iki 30°?

b) Kitas matuoklis yra įtaisytas 10 atstumu nuo medžių, o jo aukščio kampas yra 25°. Nustatykite medžių priedangos aukštį.

814. Seniausias pasaulyje fizikos bandymas

Maždaug 150 m. po Kr. graikų astronomas, geografas ir matematikas Ptolemajas tyrė šviesos lūžimą vandenyje. Jis nustatė tokias kritimo kampo α_k ir lūžio kampo α_l reikšmes:

α_k	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
α_l	8°	15,5°	22,5°	29°	35°	40,5°	45,5°	50°

a) Apskaičiuokite santykius α_k/α_l ir santykius $\sin\alpha_k/\sin\alpha_l$.

b) Nustatykite vandens lūžio rodiklį.

c) Kaip jūsų rezultatai dera su „antikiniu lūžimo dėsniu“, teigiančiu, kad „mažiems kampams kritimo kampo ir lūžio kampo santykis yra daugmaž pastovus dydis“?

815. Kai šviesos spindulys į medžiagos paviršių krinta stačiu kampu, atspindėta šviesos dalis R nusakoma tokia formule:

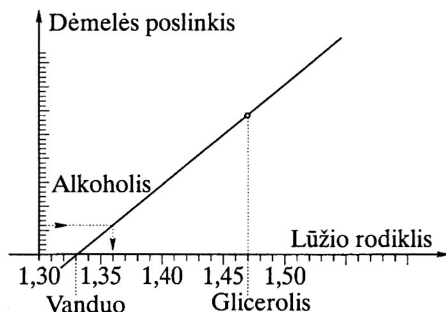
$$R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2,$$

kur n yra lūžio rodiklis. Apskaičiuokite, kiek procentų šviesos atsispindi, kai ta medžiaga yra:
a) vanduo ($n = 1{,}33$);
b) stiklas ($n = 1{,}50$);
c) deimantas ($n = 2{,}42$).

816. Eksperimentas
Pamėginsime pagal lūžio rodiklį identifikuoti skystį. Tam reikia refraktometro ir kelių skysčių su žinomais lūžio rodikliais. Juvelyrai naudojasi šiais skysčiais:

Skystis	Lūžio rodiklis
Vanduo	1,33
Alkoholis	1,36
Žibalas	1,45
Benzinas	1,50
Monobromas, naftalinas	1,65

Neturint šių skysčių, galima pasinaudoti vandeniu ir gliceroliu. Glicerolio lūžio rodiklis 1,47. Naudojant vandenį ir glicerolį, suderinamas skysčių refraktometras, išmatuojant, kiek pasislinko glicerolio šviesos dėmelė vandens dėmelės atžvilgiu.

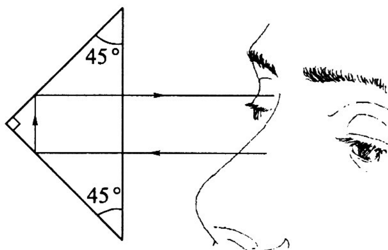


Turėdami vieną ar keletą nežinomų skysčių, išmatuokite jų lūžio rodiklius ir iš lūžio rodiklių lentelės nustatykite, kokie tai skysčiai.

817.

a) Stiklo lūžio rodiklis yra apie 1,5. Apskaičiuokite ribinį visiško atspindžio kampą, pereinant šviesai iš stiklo į orą.

b) Piešinėlyje pavaizduota trikampė prizmė. Paaiškinkite, kodėl ją galima naudoti kaip veidrodį, žvelgiant pro įžambinės plokštumą. Kodėl prizmė neatspindi žiūrint pro statinių sieneles?



Šis principas taikomas prizminiuose žiūronuose vaizdui apversti, taip pat dviračių atšvaituose, kad automobilių žibintų šviesa būtų visiškai atspindima.

818. Paveikslėlyje pavaizduotas vadinamasis šviesolaidis:

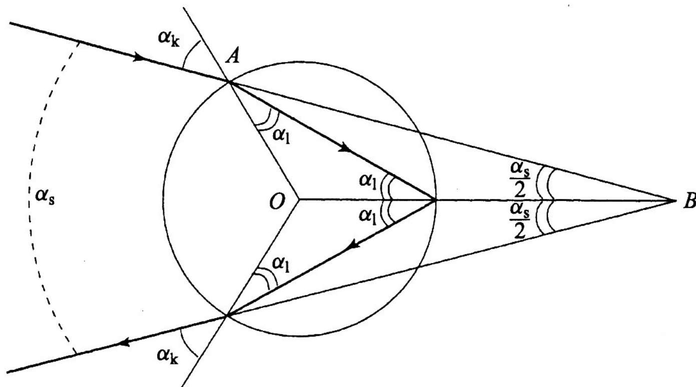


Paaiškinkite, kodėl į šviesolaidį patekusi šviesa sklisdama juo neišsisklaido į šalis. Tai galima pademonstruoti su lazeriu ir stiklo nuolauža.

819. Eksperimentas: Vaivorykštės teorija (1)

Nukreipus šviesos spindulį į „lietaus lašą“, galima pademonstruoti, kad atspindys intensyviausias tuomet, kai sklaida maksimali. Taigi turime rasti maksimalios sklaidos kampą.

I. Pirmiausia nustatysime ryšį tarp kritimo kampo α_k, lūžio kampo α_l ir sklaidos kampo α_s. Panagrinėkime į lietaus lašą krintantį šviesos spindulį:



Šviesos spindulys lūžta ir krinta kampu α_l į priešingą lašo sienelę. Pagal šviesos atspindžio dėsnį, spindulys nuo priešingos lašo sienelės atsispindi tokiu pat kampu α_l.

Tuomet spindulys vėl krinta kampu α_{l} į pirmąją sienelę ir ištrūksta atgal iš lašo kampu α_{k}. Raskime sklaidos kampą α_{s} tarp kritusio ir atspindėtojo spindulio, išreikšdami jį kritimo kampu α_{k} ir lūžio kampu α_{l}.

Įrodykite, kad trikampyje AOB galioja tokie kampų sąryšiai:

$$A = \alpha_{\mathrm{k}}; \quad B = \alpha_{\mathrm{s}}/2; \quad O = 180^\circ - 2\alpha_{\mathrm{l}}.$$

Dabar įrodykite, kad sklaidos kampą galima išreikšti taip:

$$\alpha_{\mathrm{s}} = 4\alpha_{\mathrm{l}} - 2\alpha_{\mathrm{k}}.$$

II. Pasinaudojant šviesos lūžimo dėsniu, galima apskaičiuoti susijusias α_{k} ir α_{s} reikšmes. Pagal lūžimo dėsnį

$$\frac{\sin\alpha_{\mathrm{k}}}{\sin\alpha_{\mathrm{l}}} = n \iff \sin\alpha_{\mathrm{l}} = \frac{1}{n}\cdot\sin\alpha_{\mathrm{k}}.$$

Baltos šviesos n yra maždaug 1,33. Žinodami kritimo kampą α_{k}, iš formulės

$$\sin\alpha_{\mathrm{l}} = \frac{1}{n}\cdot\sin\alpha_{\mathrm{k}}$$

galime apskaičiuoti lūžio kampą α_{l}. Tada iš lygties

$$\alpha_{\mathrm{s}} = 4\alpha_{\mathrm{l}} - 2\alpha_{\mathrm{k}}.$$

galime rasti sklaidos kampą α_{s}.

Dabar užpildykite lentelę, o α_{k} ir α_{s} reikšmių poras atidėkite koordinačių plokštumoje:

α_{k}	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
α_{l}										
α_{s}										

a) Kokiai kritimo kampo reikšmei esant, sklaida būna didžiausia?

b) Kokia gali būti didžiausia sklaida?

c) Ar nustatytieji kampai atitinka pagrindinius vaivorykštės dėsningumus?

820. Eksperimentas: Vaivorykštės teorija (2)

Balta šviesa išsiskaido į spalvas dėl to, kad skirtingų spalvų šviesos lūžio rodikliai nevienodi. Kraštinių spalvų – raudonos ir violetinės – lūžio rodikliai vandenyje yra tokie:

$$n_{\mathrm{violet}} = 1{,}343 \quad \text{ir} \quad n_{\mathrm{raud}} = 1{,}330.$$

Taigi violetinė spalva lūžta labiausiai.

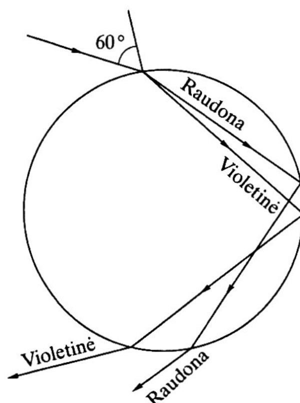
Pratime skaičiavome raudonos spalvos sklaidą. Nėra reikalo kartoti visą skaičiavimą – galima paimti tokį kritimo kampą (apie 60 laipsnių), kuriam esant sklaida būna maksimali ir rasti atitinkamą (maksimalų) violetinės spalvos ($n_{\mathrm{violet}} = 1{,}343$) sklaidos kampą.

a) Kokio pločio esti vaivorykštė, matuojant laipsniais?

b) Nupieškite vaivorykštę ir nurodykite spalvų seką.

c) Ar nustatytieji kampai atitinka pagrindinius vaivorykštės dėsningumus?

α_k	60°
α_l	
α_s	



9 skyriaus užduotys

901. Lošimo kauliukas ridenamas tris kartus.

a) Kokia tikimybė, kad 0, 1, 2 ar 3 kartus iškris šešetas?

b) Pagal bendrąsias formules (žr. I dalies 141 p.)

$$m = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \cdots + p_n \cdot x_n;$$
$$K = p_1 \cdot x_1^2 + \cdots + p_n \cdot x_n^2;$$
$$s = \sqrt{K - m^2};$$

tinkančias bet kokiam atsitiktiniam dydžiui su reikšmėmis $x_1, \ldots, x_n$, apskaičiuokite atvirtusių šešetų skaičiaus x vidurkį m ir standartinį nuokrypį s.

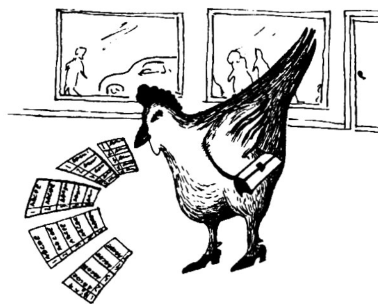
c) Ar šitokiu būdu rastos reikšmės atitinka reikšmes, gautas pagal formules

$$m = N \cdot p \quad \text{ir} \quad s = \sqrt{N \cdot p \cdot (1 - p)},$$

tinkančias tik binomiškai pasiskirsčiusiems dydžiams?

902. Iškaba virš dėžės su loterijos bilietais skelbia, kad kas ketvirtas bilietas laimi. Klientas nusipirko 30 bilietų, iš kurių laimingi buvo 4. Ar gali jis jaustis apgautas?

903. „Aklai vištai grūdas“
Teste yra 25 klausimai, ir į kiekvieną klausimą pateikta po 5 atsakymų variantus: A, B, C, D ir E, iš kurių tik vienas yra teisingas.



a) Įėjusi višta snapu kapteli bet kuriuos atsakymus į kiekvieną iš 25 klausimų. Į kiek vidutiniškai klausimų ji pataiko atsakyti teisingai?

b) Kiek atsakymų reikia atsakyti teisingai, kad galėtum būti tikras, jog kažko išmokai, t. y. pranoksti tą, kuris naudojasi „aklos vištos“ metodu?

c) Per egzaminą Petras teisingai atsakė į 80 procentų klausimų ir gavo pažymį 9. Ugnė teisingai atsakė į 70 procentų klausimų ir gavo 8. Ar tai neginčijamai rodo, kad Petras geriau pasiruošęs negu Ugnė?

904. Pagal 1994 metų tyrimus kas trečia danų šeima turi asmeninį kompiuterį – iš 2,2 mln. šeimų 733 000 turi namuose kompiuterį. Palyginimui keletas kitų šalių skaičių: Vokietijoje – 16 procentų, Prancūzijoje – 20 procentų, Anglijoje – 26 procentai. Daniją lenkia tik JAV, kur kompiuterius turi 44 procentai šalies šeimų. Remdamiesi binomine lentele, nustatykite tikimybę, kad iš 25 atsitiktinai pasirinktų danų šeimų:

a) asmeninį kompiuterį turės ne daugiau kaip 4 šeimos;

b) kompiuterį turės lygiai 6 šeimos;

c) kompiuterį turės ne mažiau kaip 6 ir ne daugiau kaip 10 šeimų.

905. Vienu metu tyrimai rodė, kad Danijos krautuvėse du iš trijų viščiukų apkrėsti salmonelėmis. Tarkime, tuomet maisto prekių parduotuvėje atsitiktinai paimti 8 viščiukai.

I. Apskaičiuokite tikimybes, kad:

a) nė vienas iš tų 8 viščiukų nebus apkrėstas salmonelėmis;

b) visi 8 viščiukai bus apkrėsti salmonelėmis.

II. Pasiremdami binomine lentele, nustatykite tikimybes, kad:

a) salmonelėmis bus apkrėsti ne daugiau kaip 3 viščiukai iš 8;

b) salmonelėmis bus apkrėsti ne mažiau kaip 3 ir ne daugiau kaip 6 iš 8 viščiukų.

906. Vienu metu tyrimai rodė, kad kas penktas danas yra išgeriantis.
Nustatykite, kokia tikimybė, kad iš 25 atsitiktinai apklaustų danų:

a) nebus nė vieno išgeriančio;

b) išgeriančių bus ne daugiau kaip 5;

c) išgeriančių bus ne mažiau kaip 10.

907. Manoma, kad iš 1200 chemijos pramonėje dirbančiųjų danų maždaug 25 gresia pavojus susirgti vėžiu.

a) Remdamiesi retųjų įvykių dėsniu, apskaičiuokite sergančių vėžiu žmonių skaičiaus standartinį nuokrypį.

b) Kokį susirgusių vėžiu skaičiaus padidėjimą galima laikyti normaliu?

c) Per laikotarpį nuo avarijos iki oficialios jos padarinių likvidavimo pabaigos Tulės bazėje dirbo apie 1200 danų.
Ar susirgusių vėžiu pagausėjimas 40 procentų tarp dirbusiųjų Tulėje laikytinas atsitiktiniu nuokrypiu?

d) Iš 130 tiesiogiai dalyvavusių avarijos padarinių likvidavimo darbuose 4 susirgo vėžiu.
Koks būtų tikėtinas susirgusių vėžiu skaičius tarp šių darbuotojų?

e) Ar dėl šių 4 vėžio atvejų galima padaryti išvadą, kad kalta Tulės avarija?

908. Apšvitinus ląsteles Rentgeno spinduliais, kyla pavojus atsirasti chromosomų defektams. Chromosomų defektų skaičius apšvitintoje ląstelėje priklauso nuo spinduliavimo intensyvumo ir trukmės. Klasikinio eksperimento metu buvo apšvitinta 482 ląstelių kolonija ir konstatuoti iš viso 138 chromosomų defektai. Defektai ląstelėse buvo pasisikirstę šitaip:

Defektų skaičius	0	1	2	3
Dažnis (ląstelių skaičius)	359	109	13	1

Statistika: Naudodamiesi lentelėje pateiktais dažniais, apskaičiuokite chromosomų defektų ląstelėje skaičiaus vidurkį bei standartinį nuokrypį. Ar galima sakyti, kad rezultatas atitinka retųjų įvykių dėsnį?

Modelis: Patyrinėsime, ar tie 138 chromosomų defektai ląstelėse pasiskirstę atsitiktinai. Tam panagrinėsime modelį, kuriame 138 defektas paskirsto 482 ląstelėje visiškai atsitiktinai ir palyginsime modelio duomenis su lentele. Įsivaizduokime, kad pasirinkome vieną ląstelę. Kadangi defektai pasiskirstę atsitiktinai, tikimybė, kad pirmasis defektas bus šioje ląstelėje, lygi $1/482$. Tikimybė, kad bet kuris kitas iš 138 defektų taip pat bus šioje ląstelėje – ta pati, taigi defektų skaičius ląstelėje yra binomiškai pasiskirstęs atsitiktinis dydis, kai bandymų skaičius $N = 138$, o sėkmės tikimybė $p = 1/138$.

a) Apskaičiuokite tikimybę, kad nagrinėjamoje ląstelėje bus 0, 1, 2 ar daugiau defektų.

b) Tuomet apskaičiuokite, kokie yra tikėtini ląstelių su 0, 1, 2 ar daugiau defektų dažniai 482 ląstelių kolonijoje, ir gautus rezultatus palyginkite su stebėtaisiais dažniais.

909. Klasikinį retųjų įvykių dėsnio taikymo pavyzdį galima aptikti vokiečių kalba išleistoje Bortkievičiaus knygoje „Mažųjų skaičių dėsnis“. Knygos autorius praeitame šimtmetyje ištyrė 200 prūsų armijos dalinių, norėdamas išsiaiškinti, kiek kareivių žuvo įspyrus arkliui. Iš viso buvo žuvę 122 kareiviai, ir po įvairius dalinius jie buvo pasiskirstę šitaip:

Žuvusiųjų skaičius	0	1	2	3	4
Dažnis (dalinių skaičius)	108	65	22	3	1

Statistika: Iš lentelėje pateiktų dažnių apskaičiuokite žuvusiųjų tam tikrame dalinyje skaičiaus vidurkį bei standartinį nuokrypį. Ar rezultatas atitinka retųjų įvykių dėsnį?

Modelis: Galime taip pat patyrinėti, ar tie 122 mirties atvejai pasiskirstę po įvairius dalinius atsitiktinai. Tam vėl panagrinėsime eksperimentą, kuriame 122 mirties atvejai pasiskirstę visiškai atstitiktinai. Samprotaudami kaip ankstesnėje užduotyje, padarysime išvadą, kad šio modelio požiūriu mirčių skaičius dalinyje yra binomiškai pasiskirstęs atsitiktinis dydis, kai bandymų skaičius $N = 122$, o sėkmės tikimybė $p = 1/200$.

a) Apskaičiuokite tikimybę, kad dalinyje žus 0, 1, 2 ar daugiau kareivių.

b) Tuomet apskaičiuokite, kokie yra tikėtini dalinių su 0, 1, 2 ar daugiau mirčių dažniai 200 dalinių prūsų armijoje, ir gautus rezultatus palyginkite su stebėtaisiais.

910. Klasikinio eksperimento metu anglų fizikas E. Rezerfordas (*Ernest Rutherford*), atradęs atomo branduolį (žr. šios knygos I d. 75 p.) tyrė radioaktyvaus preparato spinduliavimą. Per 7,5 sekundės trukmės 2608 laiko intervalų jis fiksavo skaitiklio parodymus. Iš viso jis užregistravo 10 094 impulsų ir nustatė tokį pasiskirstymą:

Skaitiklio rodmuo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Dažnis	57	203	383	525	532	408	273	139	45	27	10	4	2

a) Iš šių dažnių apskaičiuokite vidurkį ir standartinį nuokrypį. Ar galima sakyti, kad rastosios vertės atitinka retųjų įvykių dėsnį?

b) Kurie skaitiklio rodmenys yra normalieji? Kokią dalį procentais jie sudaro nuo bendrų parodymų?

c) Kurie rodmenys yra išskirtiniai? Kokią dalį procentais jie sudaro nuo bendrų parodymų?

911. Eksperimentas: Statistinis foninės radiacijos tyrimas
Geigerio skaitikliu matuokime 10 sekundžių trukmės foninę radiaciją. Gausime matavimų rodmenį – tos trukmės impulsų skaičių. Matuojama 100 intervalų, ir kiekvieno matavimo rezultatas rašomas į žemiau pateiktos lentelės atitinkamą skiltį. Jeigu, tarkime, pirmą kartą išmatavę gavote 3, tai eilutėje „dažnis" po skaičiumi 3 pažymite brūkšnelį. Kitą sykį, galbūt gavę „4", pažymite brūkšnelį skiltyje 4. Baigę matuoti, turėsite po įvairias skiltis pasiskirsčiusių 100 brūkšnelių – dažnių. Brūkšnelių skaičius skiltyje rodo atitinkamą dažnį.

Skaitiklio rodmuo u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Dažnis h													
Santykinis dažnis f													

a) Iš gautųjų santykinių dažnių apskaičiuokite vidurkį ir standartinį nuokrypį. Ar skaičiavimo rezultatai atitinka retųjų įvykių dėsnį?

b) Kurie matavimų rodmenys yra normalieji? Kokią dalį procentais jie sudaro nuo visų matavimų?

c) Kurie rodmenys yra išskirtiniai? Kokią dalį procentais jie sudaro nuo visų matavimų?

912. Eksperimentas: Pakartotinis sugavimas
„Pakartotinio sugavimo" metodo taikymą atspindi dubenėlio su ryžiais modelis. Pasverkite apie 50 gramų ryžių. Išrinkite 100 ryžių grūdelių, pažymėkite kiekvieną jų rašikliu ir suberkite atgal į dubenėlį. Indelį gerai papurtykite, vėl išrinkite 100 grūdelių ir suskaičiuokite, kiek iš jų žymėtųjų.

a) Iš šių rezultatų pabandykite įvertinti ryžių grūdelių dubenėlyje skaičių.

b) Bendrą grūdelių skaičių galima nustatyti ir pasvėrus tuos 100 grūdelių bei palyginus jų masę su bendra mase. Kaip tokiu būdu gautas rezultatas sutampa su pirmuoju?

913. Knygos 9-ame skyriuje skaičiavome nuomonių tyrimo paklaidas, kai apklausiama 1000 žmonių. Apskaičiuokite, kokios bus paklaidos apklausus 400 žmonių.

914.

a) Norint sužinoti visuomenės nuomonę apie atominę energiją, apklausiama 100 atsitiktinių žmonių. Paaiškėja, kad 45 procentai jų yra prieš atominę energiją. Ar iš to galima daryti išvadą, kad dauguma gyventojų neturi nieko prieš šios energijos naudojimą?

b) Surengus referendumą paaiškėjo, kad iš tikrųjų dauguma gyventojų – 52 procentai – yra prieš atominę energiją. Kiek gyventojų reikėjo apklausti, kad būtų buvę galima nustatyti, jog dauguma gyventojų yra prieš – 900? 1600? 2500? Ar 4000?

10 skyriaus užduotys

1001. Planetų kilpinis judėjimas

Į šiuos klausimus reikia atsakyti apie kiekvieną planetą – Venerą, Marsą, Jupiterį ir Saturną. Atsakymų ieškokite žvaigždėlapyje ir planetų lentelėse knygos gale.

a) Kaip dažnai planeta brėžia kilpą?

b) Kada planeta iš naujo brėžia kilpą?

c) Kur tuo metu planetos atžvilgiu būna Saulė, kai toji brėžia kilpą?

d) Kiek laiko trunka judėjimas kilpa?

1002. Kalendorius

Nuo senų laikų kalendoriai sudaromi remiantis dviem principais:

I. *Mėnulio kalendorius* grindžiamas *Mėnulio mėnesiu*, t. y. laiko tarpu nuo vienos iki kitos jaunaties. Mėnulio mėnesį sudaro 29,53059 paros. Mūsų laikų kalendoriuje yra išlikę Mėnulio kalendoriaus pėdsakų – šventadienių dienos nustatomos pagal Velykas, kurios būna pirmąjį sekmadienį po pirmosios pilnaties po pavasario lygiadienio.

II. *Saulės kalendorius* grindžiamas *Saulės metais*, t. y. laiko tarpu nuo vieno iki kito pavasario lygiadienio. Saulės metus sudaro 365,2422 paros. Šie du kalendoriai nelabai atitinka vienas kitą, nes į Saulės metus netelpa sveikasis Mėnulio mėnesių skaičius.

a) Kiek Mėnulio mėnesių telpa Saulės metuose?

b) Kokia dalis Mėnulio mėnesio lieka?

Praėjus atitinkamam Saulės metų skaičiui, tas Mėnulio mėnesio likutis tam tikru tikslumu priartėja prie *sveikojo* Mėnulio mėnesių skaičiaus, ir naujas mėnuo vėl prasideda tą pačią Saulės metų datą. Toks laikotarpis vadinamas *Metono ciklu* pagal graikų astronomo Metono, pastebėjusio tai apie 430 m. pr. Kr., pavardę.

c) Kiek Saulės metų reikia laukti, kad Mėnulio kalendorius vėl sutaptų su Saulės kalendoriumi? (Pagalbinė nuoroda: reikia sudaryti tos kasmet liekančios dalies x lentelę, t. y. apskaičiuoti $2x$, $3x$ ir t. t., ir tokiu būdu sužinoti, iš kokio sveikojo skaičiaus reikia padauginti tą liekaną (trupmeną), kad vėl – ne mažiau kaip 0,02 tikslumu – gautume sveikąjį skaičių.)

d) Atsiverskite enciklopediją ir išsiaiškinkite, ką reiškia bei kam vartojamos sąvokos *aukso skaičius* ir *epaktas*.

1003. Saulės užtemimai

Nuo senų laikų žmonės statė astronomijos stebyklas, kad galėtų stebėti Saulės ir Mėnulio judėjimą. Ypač reikšmingi įvykiai būdavo Saulės ir Mėnulio užtemimai, kuriuos buvo labai svarbu tiksliai išaiškinti. Seniai žinota, kad Mėnulio orbita šiek tiek pasvirusi Saulės kelio dangaus skliautu per metus – ekliptikos – atžvilgiu. Saulės užtemimas įvyksta tik tuomet, kai Mėnulis praslenka pro Saulę kuriame nors iš jų orbitų dviejų kirtimosi taškų, o Mėnulio užtemimas, kai Saulė atsiduria viename, o Mėnulis kitame kirtimosi taške (žr. I dalies 411 užduotį).

Remdamiesi Mėnulio lentelėmis knygos pabaigoje, atsakykite į tokius klausimus:

a) Kaip dažnai įvyksta Saulės užtemimai?

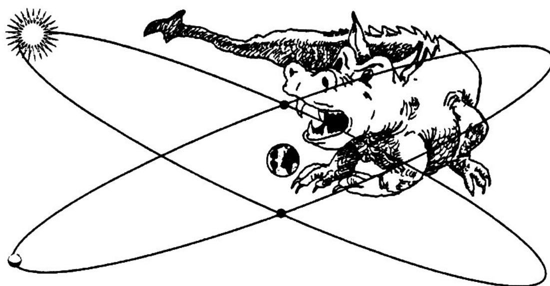
b) Kada bus artimiausias Saulės užtemimas?

c) Kiek vidutiniškai laiko praeina tarp dviejų Saulės užtemimų lentelėje nurodytu laikotarpiu?

d) Kiek praeina laiko, kol Saulė praslenka kirtimosi su Mėnulio orbita tašką ir vėl į jį grįžta?

1004. Drakono ciklas

Senovėje Rytuose manyta, kad ties Saulės ir Mėnulio orbitų kirtimosi taškais tykoja drakonai, kurie praryja Saulę. *Drakono mėnuo*, t. y. laikas, per kurį Mėnulis grįžta prie to paties drakono, yra 27,2122 paros. *Drakono metai*, t. y. laikas, per kurį Saulė sugrįžta prie to paties drakono, yra 346,6200 paros (žr. 1003 užduotį).



a) Kiek drakono mėnesių yra drakono metuose?

b) Kuri dalis drakono mėnesio lieka?

Praėjus atitinkamam drakono metų skaičiui, ta liekana išaugs, priartėdama prie sveikojo drakono mėnesių skaičiaus. Tuomet Saulė ir Mėnulis vėl praslinks pro drakoną tą pačią dieną. Vadinasi, praėjus šiam laikotarpiui, vėl pasikartos ir Saulės, ir Mėnulio užtemimas. Tas periodas vadinamas *saro* ciklu. Jo atradimas glūdi žiloje senovėje, tačiau saro ciklą šiaip ar taip jau žinojo babiloniečiai.

c) Kiek drakono metų turi praeiti, kad drakono mėnuo vėl sutaptų su drakono metais? (Pagalbinė nuoroda: reikia sudaryti tos kiekvienais drakono metais liekančios dalies x lentelę, t. y. apskaičiuoti $2x$, $3x$ ir t. t., ir tokiu būdu atrasti, iš kokio sveikojo skaičiaus reikia padauginti tą liekaną, kad vėl – ne mažiau kaip 0,02 tikslumu – gautume sveikąjį skaičių.)

d) Kiek laiko praeina tarp dviejų užtemimų saro cikle?

1005. Paieškokite tekstų iš klasikinės mitologijos, panašiai kaip pateikta paveikslėliuose 202 p.

1006. Epiciklų konstravimas

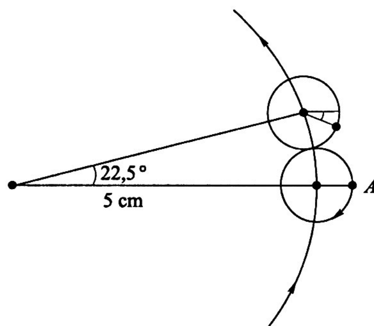
Jums reikės sukonstruoti epiciklą – kreivę, kai vienas taškas per metus apsisuka mažu apskritimu, o to apskritimo centras per tą laiką nubrėžia didelį apskritimą. Tinkamai parinkus apskritimų spindulius, tokiu modeliu galima aprašyti regimąjį Saulės judėjimą apie Žemę.

a) Nubraižykite 5 cm spindulio apskritimą.

b) Nubraižykite 16 mažų 1 cm spindulio apskritimėlių, kurių centrai būtų tolygiai išsidėstę ant didžiojo apskritimo.

c) Įsivaizduokime, kad Saulė pajuda taške A. Ant kiekvieno apskritimėlio pažymėkite, kur pasislinko Saulė, ir tuomet nubraižykite Saulės orbitą.

d) Apibūdinkite tą kreivę, kurią jūsų modelyje nubrėžia Saulė, judėdama apie Žemę.

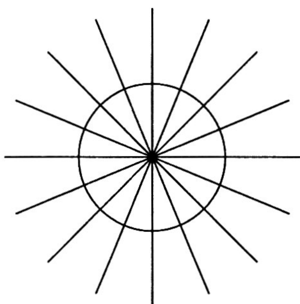


1007. Eksperimentas: Epiciklai

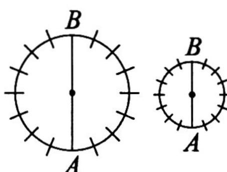
Šios užduoties tikslas – patyrinėti, kaip keičiasi epiciklai, kai keičiame modelio parametrus – mažojo apskritimo spindulį r ir dydį p, kuris reiškia mažojo apskritimo apsisukimų skaičių, kol didžiuoju apskritimu jis apkeliauja vieną ratą.

Turintys kompiuterį ir mokantys naudotis grafikus braižančiomis programomis gali jas pasitelkti ir šiai užduočiai atlikti, tačiau ne mažiau įdomu (o galbūt netgi naudingiau!) braižyti epiciklus tiesiog ant popieriaus.

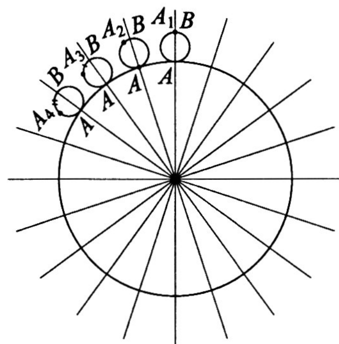
Iš pradžių pasiruoškime. Mums reikalingas didelis popieriaus lapas, ant kurio nusibrėžkime didįjį apskritimą ir tiesėmis sudalykime jį į $4 \cdot n$ (pavyzdžiui, $4 \cdot 4 = 16$ arba $4 \cdot 5 = 20$) lygių dalių, kaip parodyta 1 piešinyje.



1 piešinys



2 piešinys



3 piešinys

Iš standesnio popieriaus išsikirpkime kelis skirtingo spindulio skrituliukus (jie atitiks mažuosius apskritimus su skirtingais r). Pažymėkime jų skersmenis AB ir kiekvieno iš jų lanką taip pat padalykite į $4 \cdot n$ lygių dalių (žr. 2 piešinį).

Dabar jau galime braižyti epiciklus. Žinoma, braižysime juos tik apytiksliai: tiesiog atidėsime $4 \cdot n$ epiciklo taškų ir sujungsime juos kreive. Kaip atidėti šiuos taškus, kai $p = 1$, parodyta 3 piešinyje.

Epiciklo taškai A_1, A_2, A_3, A_4 yra atitinkamai pirmasis, antrasis, trečiasis ir ketvirtasis apskritimo dalijimo taškas (skaičiuojant nuo pažymėtojo skersmens).

Pagalvokite, kaip reiktų atidėti epiciklo taškus, kai $p = 2, 3, \ldots$. Paeksperimentuokite su skirtingais apskritimais ir įvairiomis p reikšmėmis.

1008. Ulugbeko sekstantas

Sekstantas yra šeštadalio apskritimo, t. y. 60 laipsnių, lankas. Ulugbeko sekstanto spindulys buvo 40,2 metro.

a) Koks tuomet sekstanto apskritimo ilgis? Koks atstumas tarp dviejų gretimų brūkšnių, žyminčių lanko laipsnius?

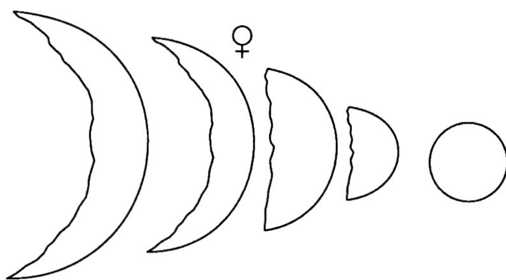
b) Kiekvienas laipsnis dalijamas į 60 minučių. Kurią lanko dalį užima viena minutė?

c) Kiekviena lanko minutė dalijama į 60 sekundžių. Kokiu tikslumu galėtume nustatyti kampus, jei žinome, kad brūkšnelius ant lanko įmanoma atidėti maždaug 1 mm intervalais?

Pastaba. Praktiškai matavimo tikslumą riboja akies skiriamoji geba. Dangaus skliaute plika akimi neįžiūrėsime atstumų, mažesnių nei 1 minutė.

1009. Venera pagal įvairius pasaulėvaizdžius

G. Galilėjus su teleskopu atrado, kad Venera, kaip ir Mėnulis, turi *fazes*. Štai Galilėjaus piešiniai:



a) Paaiškinkite, kokias *fazes* turi Venera pagal Ptolemajo, N. Koperniko ir T. Brahės pasaulėvaizdį.

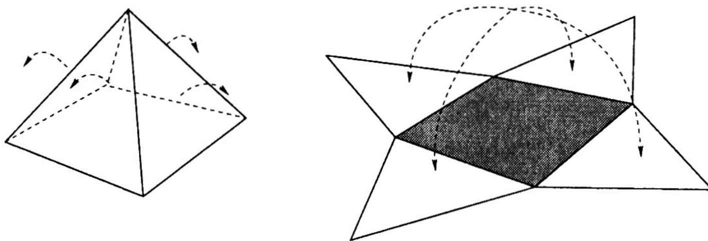
b) Paaiškinkite, kodėl Veneros *regimasis dydis* pagal Ptolemajo, N. Koperniko ir T. Brahės pasaulėvaizdžius skirtingas.

Pastaba. Šių reiškinių negalima buvo stebėti prieš teleskopo atradimą.

1010. Keplerio briaunainiai

Briaunainių pavadinimus nusako jų paviršiaus plokštumų skaičius. Pavyzdžiui, tetraedras (lot. *tetra* – 4), oktaedras (lot. *okta* – 8), ikosaedras (lot. *ikosa* – 20) ir dodekaedras (lot. *dodeka* – 12). Kiekvieną briaunainį galima supjaustyti ir iškloti. Tada būtų matyti, kokie daugiakampiai sudaro jo sienų plokštumas. Daugiakampis vadinamas *taisyklinguoju*, jeigu jo visos kraštinės ir kampai yra lygūs (lygiakraštis trikampis, kvadratas, ...). Taip pat briaunainis, kurio visos kraštinės ir kampai lygūs, vadinams *taisyklinguoju.*

Pavyzdžiui, ketursienė piramidė nėra taisyklingoji, kadangi jo sienos yra trikampiai, o dugnas – keturkampis.

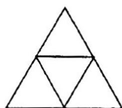


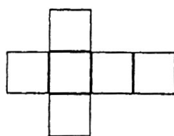
Taip išlankstoma ketursienė piramidė.

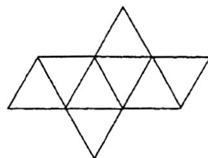
Taigi taisyklingieji briaunainiai ypatingi tuo, kad jų sienas sudaro tapatūs taisyklingieji daugiakampiai. Pavyzdžiui, taisyklingasis briaunainis gali būti sudarytas vien tik iš lygiakraščių trikampių.

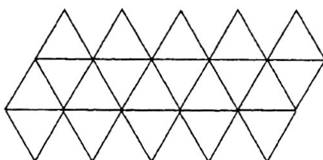
Nesunku suprasti, kodėl taisyklingieji briaunainiai yra tik penki. Taisyklingąjį briaunainį gauname surėmę taisyklinguosius daugiakampius. Tačiau kai suremiame tam tikrą skaičių daugiakampių (ne mažiau kaip 3!) ir susidaro briaunainio viršūnės, kampų suma jose turi būti mažesnė nei 360 laipsnių. Jeigu taisyklingasis briaunainis sudarytas iš lygiakraščių trikampių, kurių kiekvienas kampas – po 60 laipsnių, tai galima suremti 3, 4 ar 5 trikampius – o tokiu būdu ir gauname tetraedrą, oktaedrą bei ikosaedrą.

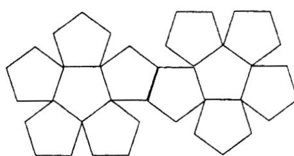
a) Raskite taisyklingojo keturkampio (kvadrato), taisyklingojo penkiakampio, taisyklingojo šešiakampio ir t. t. kampus.


Tetraedras


Kubas


Oktaedras


Ikosaedras


Dodekaedras

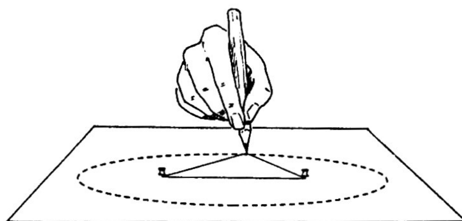
b) Nuspręskite, kaip galima iš jų suremti taisyklingojo briaunainio kampą.

1011. Elipsė

Elipsė apibrėžiama kaip visuma taškų, kurių atstumų iki dviejų židinių suma yra vienoda. Paaiškinkite, kaip galima gauti elipsę šitokiu būdu.

Ant lentos padėkite lapą popieriaus ir į lentą įsmeigkite du smeigtukus; tuomet suriškite virvelę ir ja apjuoskite smeigtukus, kaip parodyta paveikslėlyje. Pieštuku ištempę virvelę, apibrėžkite apie smeigtukus liniją.

To paties ilgio virvele nubrėžkite tris skirtingas elipses – vieną labai suplotą, kitą vidutinę, trečią beveik apskritimą.



a) Įrodykite, kad apskritimas yra atskiras elipsės atvejis.
b) Įrodykite, kad tiesės atkarpa yra atskiras elipsės atvejis.

1012. Jupiterio palydovai

Žiūrėdamas pro teleskopą Galilėjus aptiko, kad Jupiteris turi keturis didelius palydovus, kurie skrieja apie Jupiterį panašiai, kaip planetos skrieja apie Saulę. Savaime suprantama, kad šia „mažąja“ Saulės sistema domėjosi ir Kepleris. Lentelėje pateikti palydovų skriejimo periodai ir nuotoliai iki Jupiterio:

Palydovas	Ijo	Europa	Ganimedas	Kalista
Atstumas iki Jupiterio a	422 000 km	671 000 km	1 070 000 km	1 883 000 km
Skriejimo apie Jupiterį periodas T	1,76914 paros	3,55118 paros	7,15455 paros	16,68902 paros

Apskaičiuokite kiekvieno palydovo a^3 bei T^2 ir atidėkite (a^3, T^2) taškus koordinačių plokštumoje. Rezultatus pakomentuokite.

1013. Trečiasis Keplerio dėsnis

J. Keplerio dėsnis apie sąryšį tarp atstumo nuo vieno dangaus kūno iki kito ir vieno jų skriejimo periodo apie kitą tinka kiekvienam dangaus kūnui su palydovais, t. y. apie jį skriejančiais mažesniais dangaus kūnais. Dėsnis užrašomas tokia formule:

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{const},$$

kur konstantos reikšmė priklauso nuo centrinio kūno. Štai, pavyzdžiui, šis dėsnis tinka kūnams, skriejantiems apie Jupiterį.

a) Apskaičiuokite tą konstantą, įrašę atstumą iki Mėnulio (384 400 km) ir Mėnulio skriejimo periodą (27,32 paros = 655,7 valandos).

b) Jei ne oro pasipriešinimas, galėtumėte paleisti kokį nors kūną skrieti apie Žemę kelių metrų aukštyje.
Apskaičiuokite tokio kūno skriejimo periodą, tarę, kad Žemės spindulys lygus 6370 km.

c) Naudojant dirbtinį Žemės palydovą telefono ryšiui ar televizijos programoms perduoti, svarbu, kad palydovas būtų stacionarus Žemės atžvilgiu, t. y. jis turi skrieti ties ta pačia pusiaujo vieta ir iš bet kur Žemėje būtų matyti ta pačia kryptimi. Tuomet pakanka nustatyti imtuvų antenas vienintelį kartą. Koks yra stacionaraus palydovo skriejimo periodas? Kaip aukštai erdvėje jis turi skrieti apie Žemę?

1014. Lentelėje pateikti planetų vidutiniai nuotoliai nuo Saulės (astronominiais vienetais):

Planeta	Merkurijus	Venera	Žemė	Marsas	Jupiteris
Atstumas	0,387	0,723	1,000	1,524	5,203
Planeta	Saturnas	Uranas	Neptūnas	Plutonis	
Atstumas	9,539	19,18	30,06	39,44	

Šiuos vidutinius nuotolius paverskite šviesminutėmis ir šviesvalandėmis.

a) Kiek laiko užtrunka šviesos spindulys, sklisdamas per visą Saulės sistemą?

Pasiuntus zondą fotografuoti kitų planetų, jis paprastai valdomas radijo signalais iš Žemės, o padarytos nuotraukos taip pat siunčiamos radijo bangomis, kurios skrieja šviesos greičiu.

b) Kiek laiko truks gauti atsakymą iš tokio zondo, esančio ties Marsu opozicijoje?

c) Kiek laiko truks, kol radijo signalas pasieks zondą, skriejantį ties Neptūnu?

1015. 1009 ir 1013 užduotyse minėjome kai kuriuos iš atradimų, G. Galilėjaus padarytų naudojantis teleskopu.

a) Koks buvo Galilėjaus vaidmuo, griaunant klasikinį pasaulėvaizdį?

b) Kokiais savo atradimais G. Galilėjus parėmė N. Koperniko pasaulėvaizdį?

c) Kokia buvo G. Galilėjaus konflikto su popiežiumi esmė, ir kokios to konflikto pasekmės G. Galilėjui?

1016. Planetų skriejimo periodai

Iš T. Brahės stebėjimų J. Kepleriui buvo žinomi planetų skriejimo *sinodiniai periodai*, t. y. laiko intervalai tarp dviejų jų opozicijų. Sinodinius periodus galima paversti tikraisiais periodais:

Planeta	Merkurijus	Venera	Marsas	Jupiteris	Saturnas
Sinodinis skriejimo periodas (d.)	116	584	780	399	378
Tikrasis skriejimo periodas (m.)	0,241	0,615	1,881	11,862	29,458

Kalbėdami apie J. Keplerio metodą, 215 puslapyje nurodėme, kaip rasti Marso skriejimo periodą. Patikrinkite ir kitus lentelėje pateiktus planetų skriejimo periodus (nors Jupiterio bei Saturno periodų neįmanoma taip tiksliai apibrėžti kaip lentelėje).

11 skyriaus užduotys

1101. Šviesmetis

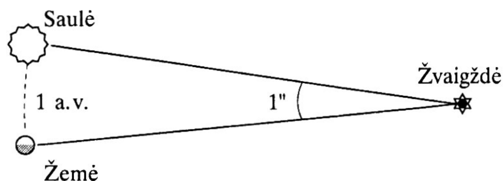
a) Kiek metai turi sekundžių?

b) Apskaičiuokite, kokį kelią nusklinda šviesa per metus.

c) Kaip minėjome 10 skyriuje, astronominis vienetas, t. y. atstumas nuo Žemės iki Saulės, yra 500 šviessekundžių. Kiek astronominių vienetų sudaro šviesmetį?

1102. Atstumų nustatymas erdvėje

Įsivaizduokite per Žemę ir Saulę nubrėžtą apskritimą, kurio centras žvaigždėje, iš kurios Žemė ir Saulė matyti 1 sekundės kampu, t. y. kur tos žvaigždės paralaksas lygus 1 sekundei. 1 sekundė yra 1/60 minutės, o minutė yra 1/60 laipsnio.



a) Koks būtų šio apskritimo ilgis, išreikštas lanko tarp Žemės ir Saulės ilgiu, t. y. astronominiais vienetais?

b) Koks tuomet būtų nuotolis iki žvaigždės astronominiais vienetais?

c) Koks jis būtų šviesmečiais?

Dabar perkelkite žvaigždę toliau, kad Žemė ir Saulė iš jos būtų matyti 1/2 sekundės kampu, t. y. kad žvaigždės paralaksas būtų 1/2 sekundės.

d) Koks būtų šio apskritimo ilgis, išreikštas lanko tarp Žemės ir Saulės ilgiu, t. y. astronominiais vienetais?

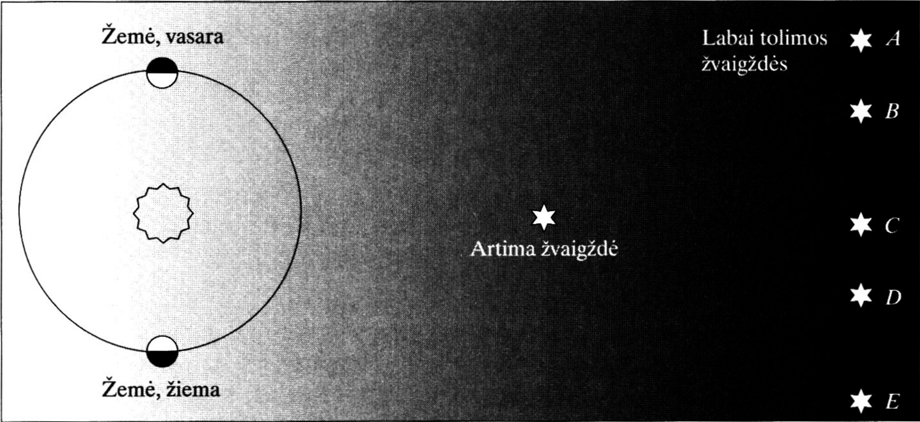
e) Koks tuomet būtų tas nuotolis iki žvaigždės astronominiais vienetais?

f) Koks jis būtų šviesmečiais?

g) Koks iš čia plaukia sąryšis tarp nuotolio iki žvaigždės šviesmečiais ir jos paralakso lanko sekundėmis?

1103. Paralakso nustatymas

Kas pusmetis fotografuojant artimą žvaigždę, atrodys, kad ta žvaigždė slankioja tolimųjų žvaigždžių fono atžvilgiu.



Piešinėliuose pavaizduotos labai tolimos žvaigždės *A*, *B*, *C*, *D* ir *E* žiemą ir vasarą:

Vaizdas vasarą 0,1"

A *B* *C* *D* *E*

Vaizdas žiemą 0,1"

A *B* *C* *D* *E*

a) Pažymėkite, kur viename ir kitame paveikslėlyje bus artimoji žvaigždė.

b) Koks bus žvaigždės paralaksas?

c) Koks tuomet yra nuotolis iki tos žvaigždės matuojant šviesmečiais?

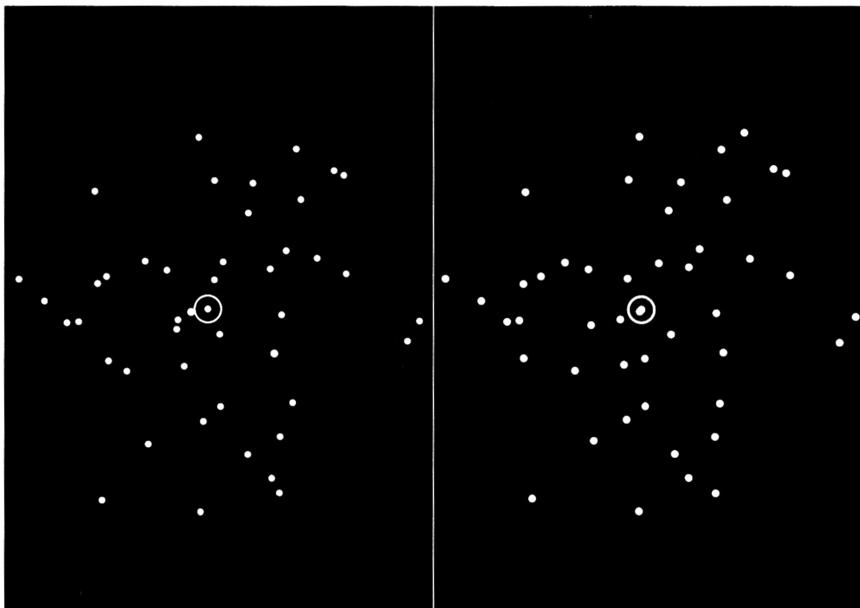
1104. Atstumai iki artimiausių žvaigždžių

a) Artimiausiosios mūsų žvaigždės, kuri iš tikrųjų yra trinarė žvaigždė (Kentauro Alfa, Beta ir Proksima), paralaksas yra 0,75 sekundės.
Už kiek šviesmečių ji yra nuo mūsų?

b) Ryškiausios padangės žvaigždės Sirijaus paralaksas yra 0,37 sekundės.
Už kiek šviesmečių ji yra nuo mūsų?

1105. Artimiausios žvaigždės trimatėje erdvėje

Pateiktasis paveikslėlis yra 45 artimiausiųjų žvaigždžių stereograma. Erdvės įspūdis pasiekiamas žiūrint į dvigubą nuotrauką taip, kad du žiedai, juosiantys Saulę, susilietų. Tam reikia žvairuoti akimis. Iš pradžių būtų neblogai laikyti iškėlus pirštą ties paveikslėlių viduriu ir sukoncentruoti žvilgsnį į piršto galiuką.



Mūsų kaimynystėje esančios žvaigždės erdvėje išsidėsčiusios chaotiškai. Vidutinis nuotolis tarp dviejų žvaigždžių – apie 5 šviesmečiai.

1106. Kosmoso keleiviai

Nežiniukas: Pati didžiausia žvaigždė yra Sirijus. Juk ji spindi už visas žvaigždes stipriausiai.

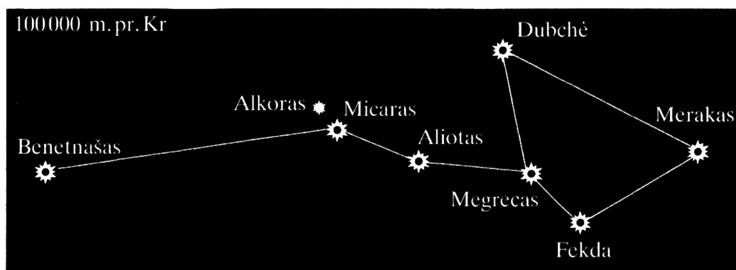
Žiniukas: Yra daug žvaigždžių ilgesnio skersmens ir didesnio tūrio negu Sirijus. Pavyzdžiui, į labai išsipūtusios raudonosios supermilžinės Betelgeizės vidų galima sutalpinti 15 625 000 tokių žvaigždžių kaip Sirijus. Tiesa, Betelgeizės paviršiaus temperatūra tik 3000°C. Tuo tarpu Sirijaus – net 10 500°C. Todėl Sirijaus paviršiaus vienas kvadratinis metras spinduliuoja 150 kartų galingiau negu Betelgeizės vienas kvadratinis metras (proporcingai temperatūros ketvirtajam laipsniui). Nepaisant žemos temperatūros, didžiulis Betelgeizės paviršius skleidžia daug daugiau spindulių energijos, negu Sirijaus paviršius per tą patį laiką. Tačiau nuo Žemės iki Sirijaus yra vos 8,7 šviesmečio, o iki Betelgeizės – net 520 šviesmečių. Dėl to Žemė iš Sirijaus gauna daugiau spindulių energijos negu iš Betelgeizės.

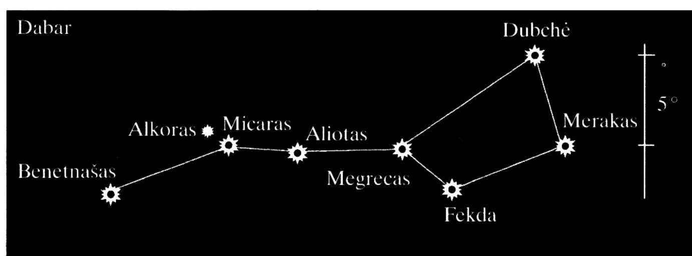
Nežiniukas: Kiek kartų daugiau? Ir dar: o kaip būtų, jei abi žvaigždės būtų vienodai nutolusios nuo Žemės?

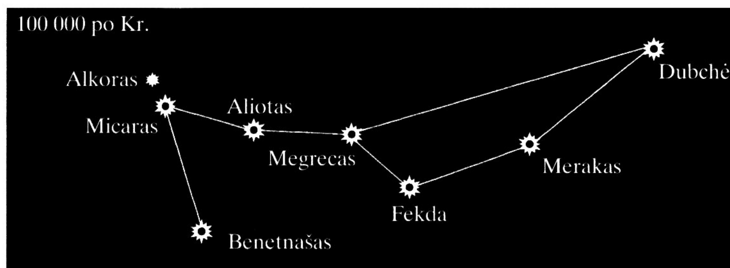
Ką atsakė Žiniukas? (Pasinaudokime apšviestumo dėsniu, kuris teigia, kad iš spinduolio gaunama spindulių energija yra tiesiogiai proporcinga spinduliavimo galiai ir atvirkščiai proporcinga nuotolio iki spinduolio kvadratui, jei erdvė spindulių kelyje yra visiškai skaidri. Iš tikrųjų erdvėje tarp žvaigždžių esama mikroskopinių dulkelių, kurios sumažina skaidrumą, tačiau į tai nekreipkime dėmesio.)

1107. Žvaigždžių judėjimas danguje

Šiuose trijuose piešinėliuose pavaizduota, kaip kas 100 000 metų pasislinko Didžiųjų Grįžulo Ratų žvaigždės.







a) Remdamiesi piešinėliu, pasakykite, kiek laipsnių Didžiųjų Grįžulo Ratų žvaigždės pasislenka per metus. (Perpiešę per kalkę, visus tris piešinėlius sudėkite vieną ant kito.)

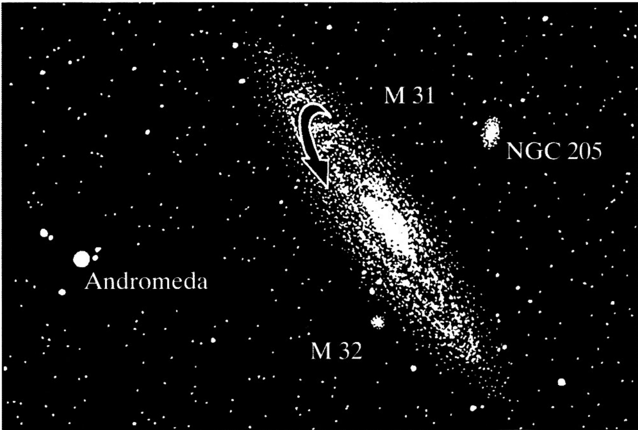
b) Mėnulio regimasis skersmuo – daugiau nei pusė laipsnio. Kokio skersmens būtų Mėnulis kuriame nors iš šių paveikslėlių? Kiek laiko užtruktų žvaigždei Aliotui pasislinkti per Mėnulio skersmenį?

c) Danų astronomas T. Brahė galėjo stebėti žvaigždes 1 minutės tikslumu. Kiek laiko jam būtų reikėję stebėti, norint pamatyti, kad žvaigždės slenka viena kitos atžvilgiu?

1108. Andromedos galaktika

Paveikslėlyje pavaizduota Andromedos galaktika su dviem jos palydovėmis galaktikomis.

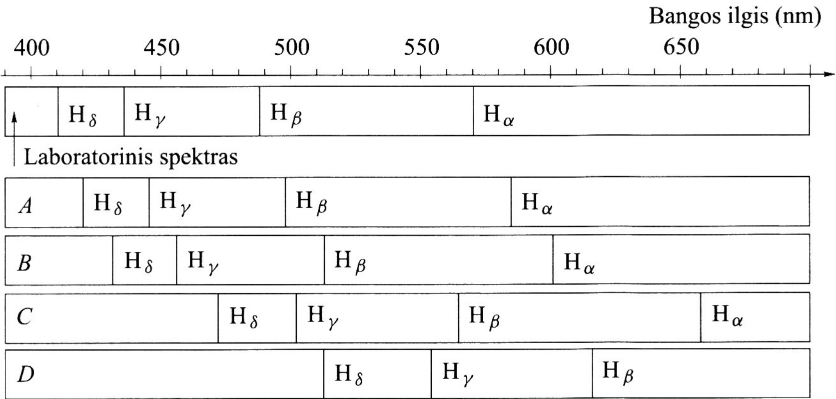
Andromedos galaktika yra už 2,25 milijonų šviesmečių nuo mūsų, ji išsidriekusi daugiau nei per 100 000 šviesmečių. Koks jos regimasis skersmuo dangaus skliaute? (Pagalbinė nuoroda: įsivaizduokite apskritimą su centru Žemėje ir 2,25 mln. šviesmečių spinduliu. Kokią dalį apskritimo ilgio sudarytų tie 100 000 šviesmečių?)



Mėnulio regimasis skersmuo – daugiau nei pusė laipsnio. Koks būtų Mėnulio skersmuo šiame paveikslėlyje?

1109. Raudonasis poslinkis

Čia pateikti keturi pasislinkę vandenilio spektrai – *A*, *B*, *C* ir *D*.



a) Koks yra kiekvienu atveju raudonojo poslinkio rodiklis z?

b) Kokio didumo turi būti raudonasis poslinkis, kad visų keturių pateiktųjų spektrų linijos pradingtų iš regimosios srities?

1110. Originali Hablo schema

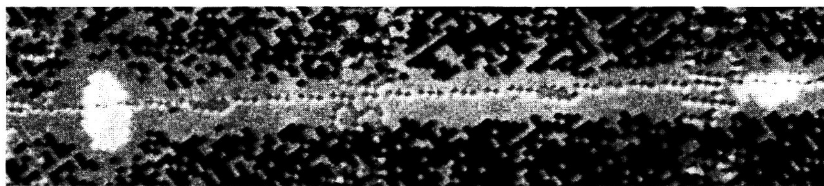
Žinome, kad pirmoji kalciui būdinga spektro linija yra 393 nm. Pagal originalią Hablo schemą (231 p.) išmatuokite keturių apatinių galaktikų spektrų raudonojo poslinkio rodiklius.

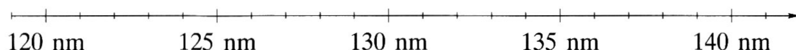
1111. Kvazarai

Artimiausias kvazaras yra 3C 273. Žemiau pateiktas jo ultravioletinio spektro fragmentas. Ties 122 nm matyti išsklidusi spektrinė linija. Ji atsiranda dėl Žemės atmosferoje esančio vandenilio. Ties 141 nm matyti atitinkama kvazaro linija.

a) Apskaičiuokite kvazaro raudonojo poslinkio rodiklį z.

b) Kokiu greičiu kvazaras tolsta nuo mūsų?

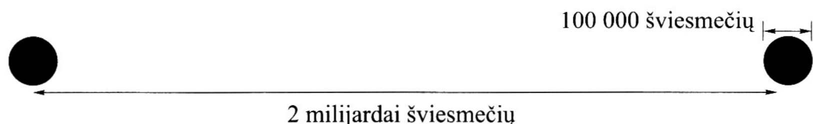




1112. Didieji raudonieji poslinkiai

Didžiausi išmatuoti raudonieji poslinkiai yra didesni kaip 4, t. y. didesni nei 400 procentų. Jeigu raudonojo poslinkio rodiklis yra 4, vadinasi, kol šviesa atsklido iki mūsų, visi atstumai išaugo 400 procentų, taigi erdvė išsiplėtė 5 kartus, o erdvės tūris nuo šviesos išspinduliavimo momento tuomet padidėjo $5 \times 5 \times 5 = 125$ kartus. Todėl kartais sakoma, kad jei raudonasis poslinkis yra 4, tai Visata nuo šviesos išspinduliavimo momento padidėjo 125 kartus.

Būdinga galaktika yra 100 000 šviesmečių skersmens, o tipiški atstumai tarp kaimyninių galaktikų – keli milijonai šviesmečių. Dabar panagrinėkime dvi tokias kaimynines galaktikas:



a) Ar sumažinus atstumus 5 kartus, galaktikos susilies?

b) Kokio didumo turi būti raudonojo poslinkio rodiklis z, kad galaktikos būtų lietęsi šviesos išspinduliavimo momentu?

1113. Galaktika, kurios raudonojo poslinkio rodiklis 0,20, yra už 4 milijardų šviesmečių nuo mūsų. Kiek galaktika nutolo, kol jos šviesa pasiekė mus?

1114. Hablo dėsnis

Dabar išsamiau panagrinėsime, koks ryšys tarp nuotolio iki galaktikos d ir greičio v, kuriuo ji tolsta nuo mūsų dėl erdvės plėtimosi. Greitį v nesunku rasti iš raudonojo poslinkio rodiklio z. Kur kas sudėtingiau tiksliai nustatyti atstumą iki galaktikos. Kai atstumai didesni nei 100 milijonų šviesmečių, tenka naudotis regimojo žvaigždžių šviesio metodu, ir neišvengiama tam tikros paklaidos.

Dabar patyrinėkime šių penkių galaktikų bei jų spektrų nuotraukas:

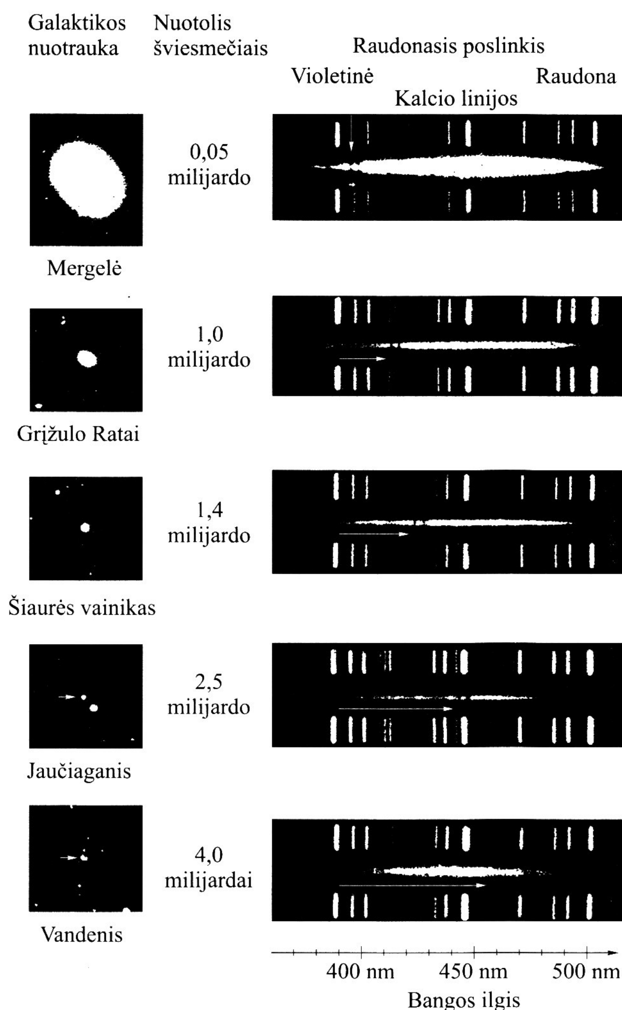
a) Iš spektrų apskaičiuokite galaktikų raudonąjį poslinkį z ir paverskite jį galaktikos greičiais v. Pateikite greitį km/s.

b) Nuotolio d ir greičio v reikšmių poras atidėkite kooordinačių plokštumoje. Nuotolius atidėkite megašviesmečiais, t. y. milijonais šviesmečių.

c) Įsitikinkite, kad greitis v yra tiesiogiai proporcingas nuotoliui d. Tuomet sąryšį tarp v ir d galima užrašyti tokiu pavidalu:

$$v = H \cdot d.$$

d) Grafike raskite proporcingumo koeficiento H (vadinamosios Hablo konstantos) reikšmę. Kokie Hablo konstantos vienetai?



Tokiu būdu įsitikinome, kad Hablo dėsnis yra toks:

Greitis, kuriuo tolimos galaktikos tolsta nuo mūsų, yra tiesiogiai proporcingas nuotoliui iki jų.

Atvirkščią Hablo konstantai dydį $1/H$ galima suvokti kaip laiką, praėjusį nuo tada, kai galaktikos dar buvo „susiliejusios“ – jei tarsime, kad erdvė nuolat plėtėsi pastoviu greičiu. Todėl atvirkščias Hablo konstantai dydis gali būti kaip apytikslis Visatos amžiaus įvertinimas.

e) Koks būtų pagal tokius mūsų apskaičiavimus Visatos amžius?

1115. Šioje užduotyje remsimės Hablo dėsniu – kad greitis, kuriuo galaktika dėl Visatos plėtimosi tolsta nuo mūsų, proporcingas nuotoliui iki tos galaktikos (žr. 1114 užd.).

a) Kvazaro 3C 273 raudonojo poslinkio rodiklis yra 0,16. Kokiu greičiu jis tolsta nuo mūsų?

b) Nustatyta, kad galaktika, kurios raudonojo poslinkio rodiklis – 0,125, yra už 2,5 milijardo šviesmečių nuo mūsų. Kaip toli nuo mūsų yra kvazaras?

Gamtos mokslų kurso egzaminas raštu

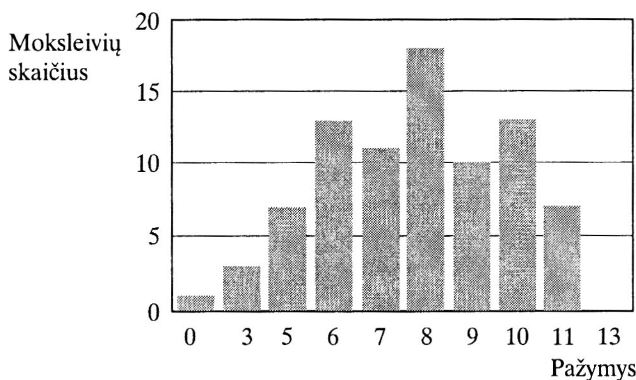
Šiame skyrelyje pateikiami Danijos mokyklų 1998 m. baigiamojo gamtos mokslų egzamino humanitarinių klasių moksleiviams pavyzdžiai.

Dauguma šio egzamino uždavinių yra iš matematikos arba susiję su matematikos taikymu sprendžiant fizikos ir chemijos uždavinius. Pateiktuose uždaviniuose iš fizikos ir chemijos yra, pavyzdžiui, energijos, branduolio fizikos, cheminių reakcijų ar tiesiog kiekio skaičiavimų. Taigi egzaminuojamiesiems pateikiama daug uždavinių iš skirtingų sričių arba bendrų keletui sričių. Uždavinių sąlygose egzaminuojamiesiems pateikiama dalykinė informacija, kurią jie turi matematiškai apdoroti, todėl yra palyginti daug žodinių uždavinių.

Kiekvieną egzamino užduotį sudaro apie 20 klausimų, suskirstytų į 7 uždavinius. Pirmąjį uždavinį sudaro 4–5 paprasti, tarpusavyje nesusiję klausimai; siekiama patikrinti egzaminuojamojo žinias iš įvairių programos sričių. Kitus uždavinius sudaro sunkesni ar lengvesni vienos srities klausimai, dažnai susiję vienas su kitu. Atsakymai į egzamino klausimus vertinami vienodų balų skaičiumi.

1998 metų egzaminui buvo paruoštos dvi užduotys. Pagrindinė užduotis buvo skirta egzaminui, įvykusiam 1998 gegužės mėn., kita – egzaminui, įvykusiam 1998 rugpjūčio mėn., kurį galėjo laikyti tie, kas pirmojo egzamino metu sirgo. Pagrindinio egzamino pažymius viename iš egzaminavimo centrų atspindi lentelė ir diagrama.

Pažymys	0	3	5	6	7	8	9	10	11	13
Skaičius	1	3	7	13	11	18	10	13	7	0



Pagrindinio egzamino pažymių vidurkis yra 7,7, mediana – 8. Kaip matyti, pažymiai gana simetriškai išsidėstę apie 8 balus, tik keletas pažymių 0 ir 3. Niekas negavo pažymio 13, tačiau nemaža dalis moksleivių gavo 10 ir 11. Taigi gamtos mokslų egzamino raštu rezultatus galima laikyti patenkinamais.

Vertinant moksleivių atsakymus į užduotis, atsižvelgta į keletą veiksnių. Buvo įvertinta ir metodo pasirinkimas, ir uždavinių sprendimo rezultatų teisingumas. Daug reikšmės buvo teikiama tam, ar iš atsakymų į klausimus galima spręsti apie aiškią egzaminuojamojo minčių eigą. Pavyzdžiui, galėjo būti atsižvelgta į tarpinius skaičiavimus, jei iš to galima spręsti, kokie žingsniai daryti ieškant atsakymo į klausimą. Vertinant galėjo būti atsižvelgta į moksleivio pasirinktą skaičiavimams formulę. Geometrinių užduočių sąlygose pateikiami brėžiniai, kuriais turėtų remtis moksleiviai. Jų nubraižytuose grafikuose vertinama, ar tinkamai panaudota koordinačių sistema, ar teisingai sudalytos koordinačių ašys. Jei uždavinyje reikalaujama padaryti išvadas iš grafikų, tai moksleiviams pateiktos tų grafikų kopijos. Ant jų egzaminuojamieji galėjo

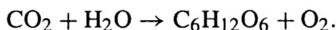
pažymėti reikšmes, reikalingas atsakymams į klausimus. Jei egzaminuojamiesiems buvo privalu nustatyti, apie kokio tipo funkciją kalbama, tai vertinant atsižvelgiama, ar yra pateikti samprotavimai apie tai, kaip iš grafiko formos nustatytas konkrečios funkcijos tipas. Sprendžiant kai kuriuos uždavinius, pavyzdžiui, apie chemines ar branduolines reakcijas, papildomi aiškinimai nėra būtini. Jei uždaviniai susiję su gamtos mokslų fizikos ir chemijos programos temomis, tai be kita ko vertinant atsižvelgta, ar teisingi matavimo vienetai nurodyti prie pateiktųjų skaitinių rezultatų.

1998 gegužės mėn. egzamino užduotis

1 uždavinys

a) Vario specifinė šiluminė talpa yra 387 J/(kg · laipsn.). Vario gabalas, kurio masė 0,3 kg, įkaitintas nuo 20 °C iki 160 °C. Apskaičiuokite suvartotą energiją.

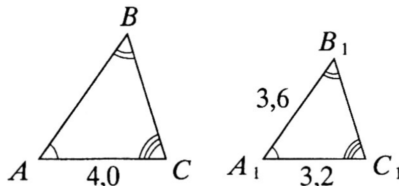
b) Augaluose vyksta reakcija



$$CO_2 + H_2O \rightarrow C_6H_{12}O_6 + O_2.$$

Reakcijos lygtis nesutvarkyta. Sutvarkykite ją.

c) Nubraižyti du trikampiai $\triangle ABC$ ir $\triangle A_1B_1C_1$, kurių atitinkami kampai lygūs. Brėžinyje nurodyti kai kurių kraštinių ilgiai. Raskite AB.



d) Išspręskite lygtį $3(x-2) = \frac{2}{7}(x+3) - 5$.

2 uždavinys

Ant butelio su chemine medžiaga užrašyta:

Natrio hidroksido tirpalas
NaOH(v.t.)
50 mℓ   0,15 mol/ℓ

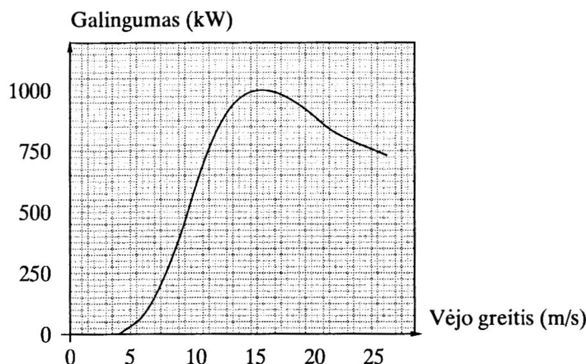
a) Kiek molių NaOH yra butelyje?

b) Kiek gramų NaOH suvartota šiam tirpalui pagaminti?

c) Apskaičiuokite tirpalo pOH ir pH.

3 uždavinys

Avedoro malūnas yra vienas didžiausių vėjo malūnų Danijoje.
Diagrama atspindi, kaip malūno gaminamos elektros galingumas priklauso nuo vėjo greičio.



a) Koks turi būti mažiausias vėjo greitis, kad Avedoro malūnas pradėtų gaminti elektrą? Koks turi būti vėjo greitis, kad gaminamos elektros galingumas būtų didžiausias?

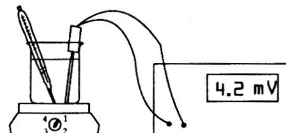
b) Kokiu greičiu pučiant vėjui malūno gaminamos elektros galingumas lygus 750 kW?

c) Vieną dieną $3\frac{1}{2}$ valandos vėjas pūtė 7,5 m/s greičiu. Kiek elektros energijos pagamino malūnas per šį laikotarpį?

4 uždavinys

Termoelektrinis prietaisas rodo įtampą, kuri priklauso nuo temperatūros. Bandymo metu prietaisas įstatomas į vandenį, matuojama jo temperatūra ir įtampa. Lentelėje pateikti bandymo rezultatai.

Temperatūra T (°C)	25	40	60	75	85	95
Įtampa U (mV)	2,1	2,7	3,5	4,2	4,6	5,0



a) Pagrįskite, kad įtampa U auga tiesiškai temperatūros T atžvilgiu.

b) Užrašykite įtampos kaip temperatūros funkcijos formulę.

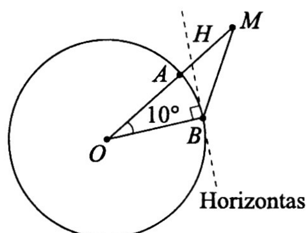
c) Kokia turi būti temperatūra, kad įtampa būtų 0 mV?

5 uždavinys

Kosminė stotis MIR sukasi aplink Žemę beveik apskritimo formos orbitomis. Brėžinyje pavaizduota stoties padėtis taške M, kuris yra 389 km nutolęs nuo taško A (A yra Žemės paviršiaus taškas – statmenoji taško M projekcija į Žemės paviršių).
Taškas O yra Žemės centras; Žemės spindulys lygus 6371 km. Iš taško B, kuris yra 10° piečiau nuo A, stotį stebi stebėtojas.

a) Apskaičiuokite atstumą nuo B iki M.

b) Apskaičiuokite trikampio OBM kampą B, taip pat kampą, kuriuo stebėtojas, esantis taške B, mato stotį MIR virš horizonto, t. y. raskite trikampio HBM kampą B.



6 uždavinys

Cezio izotopas ^{137}Cs yra radioaktyvus; jo skilimo pusamžis – 30,17 metų.



Mokyklinis radioaktyvusis šaltinis su ^{137}Cs.

a) Apskaičiuokite ^{137}Cs skilimo konstantą. Radioaktyvųjį šaltinį sudaro ^{137}Cs, kurio radioaktyvumas 370 000 Bq.

b) Apskaičiuokite ^{137}Cs atomų kiekį šaltinyje.

7 uždavinys

Apskaičiuota, kad per du mėnesius iš dviejų blusų šuns kailyje gali prisiveisti 228 trilijonai...

Tarkime, kad blusų skaičių galima nusakyti eksponentine funkcija $f(x)$, kuri reiškia blusų skaičių laiko momentu x (dienomis), ir $f(0) = 2$. Laikysime, kad mėnuo turi 30 dienų. Trilijonas lygus 10^{12}.

a) Užrašykite f formulę.

b) Po kiek dienų blusų bus daugiau nei 100 trilijonų?

Tarkime, kad vienos blusos masė yra 2 mg.

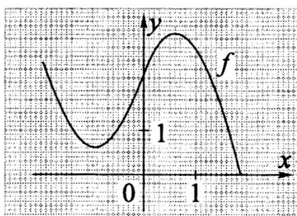
c) Nustatykite visų blusų masę po 10 mėnesių, tarę, kad blusų skaičiaus augimas išliks nepakitęs.

1998 rugpjūčio mėn. egzamino užduotis

1 uždavinys

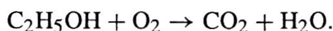
a) $^{228}_{90}$Th yra α-radioaktyvus. Parašykite branduolių skilimo lygtį.

b) Brėžinyje parodytas funkcijos f grafikas. Išspręskite lygtį $f(x) = 2$.



c) Išspręskite nelygybę $3x + 4 \leqslant 2(7 - x)$.

d) Spiritas C_2H_5OH dega šitaip:



$$C_2H_5OH + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O.$$

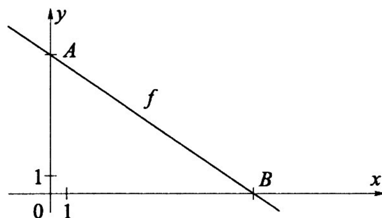
Sutvarkykite reakcijos lygtį.

2 uždavinys

Brėžinyje pavaizduotas tiesinės funkcijos f grafikas. Taškai $A(0; 8)$ ir $B(12; 0)$ priklauso šiam grafikui.

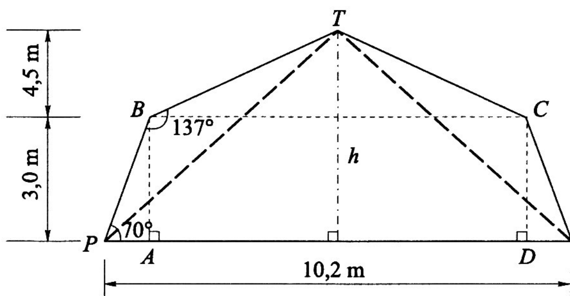
a) Sudarykite funkcijos f formulę.

b) Raskite $f(-5)$ ir išspręskite lygtį $f(x) = -10$.



3 uždavinys

Brėžinyje pavaizduota vienaukščio namo simetriškos stogo konstrukcijos (vadinamojo mansardos stogo) dalis.



Stogo šlaitai pakelti, kad būtų galima geriau išnaudoti palėpės erdvę. Keturkampis $ABCD$ rodo palėpėje įrengto kambario pjūvį.

a) Apskaičiuokite aukštį AB.

b) Apskaičiuokite plotį AD.

c) Apskaičiuokite PT.

4 uždavinys

Lentelėje atvaizduotos metinės reklamos išlaidos Danijoje.

Reklamos kaina
Pastaraisiais metais išleista daugiau nei 19 mlrd. reklamos užsakymams ir dar daugiau bus išleista ateityje

Reklamai Danijoje išleistų pinigų suma	
1992 m.	14 235 mln. kr.
1993 m.	14 867 mln. kr.
1993 m.	14 867 mln. kr.
1994 m.	15 994 mln. kr.
1995 m.	18 061 mln. kr.
1996 m.	19 381 mln. kr.

Šaltinis: Fyens Stiftstidende, 1997 06 21

a) Laikydami 1994 metus baziniais, nustatykite nurodytų metų reklamos išlaidų indeksus.

b) Nustatykite santykinį reklamos išlaidų nuo 1992 iki 1993 prieaugį (%), taip pat vidutinį metinį santykinį prieaugį nuo 1992 iki 1996 metų.

5 uždavinys

Puodas su aliejumi šildomas ant viryklės. Lentelėje nurodytos aliejaus temperatūros reikšmės.

Laikas (s)	0	20	40	60	80
Temperatūra T (°C)	21	44	66	90	112



a) Įrodykite, kad šildant aliejaus temperatūra pakankamu tikslumu tiesiškai priklauso nuo laiko.

b) Kiek pakyla per sekundę aliejaus temperatūra?

Puode yra 0,32 kg aliejaus. Aliejaus specifinė šiluminė talpa yra 2,2 kJ/kg·laipsn.

c) Apskaičiuokite, kiek energijos aliejui suteikiama per sekundę.

6 uždavinys

Ant marmurinių grindų netyčia buvo išpilta 25 mℓ praskiestos druskos rūgšties, kurios pH = 0,3.

a) Apskaičiuokite H_3O^+ kiekį druskos rūgštyje.

b) Apskaičiuokite H_3O^+ molių skaičių 25 mℓ druskos rūgšties.

Druskos rūgštis nebuvo nušluostyta ir todėl sureagavo su marmuro grindimis. Marmurą sudaro $CaCO_3$, reaguojanti su HCl; reakcijos lygtis tokia:

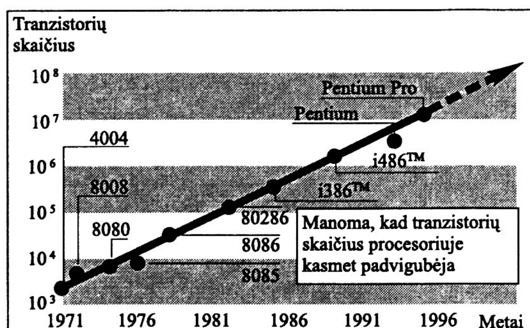


$$CaCO_3 + 2HCl \rightarrow CaCl_2 + H_2O + CO_2.$$

c) Apskaičiuokite $CaCO_3$ masę moliais ir raskite marmuro, kuris sureagavo su išpilta druskos rūgštimi, masę.

7 uždavinys

Diagramoje parodyta, kaip didėjo tranzistorių skaičius viename procesoriuje.



Matome, kad maždaug nuo 1971 šis skaičius augo eksponentiškai. 1971 metais tranzistorių skaičius buvo 2300, o 1995 metais – 10^7.

a) Užrašykite tranzistorių skaičiaus formulę, laiką (m.) pradėję skaičiuoti nuo 1971.

b) Kiek procentų išaugdavo tranzistorių skaičius procesoriuje kasmet 1971–1995 laikotarpiu?

c) Apskaičiuokite dvigubėjimo konstantą ir pakomentuokite ištraukos teiginį, kad tikėtina, jog tranzistorių skaičius padvigubėja kasmet.

d) Apskaičiuokite tranzistorių skaičių procesoriuje 2005 metais, tarę, kad augimo pobūdis išliks nepakitęs.

Dalykinė ir vardų rodyklė

α dalelė 64
aktyvumas 71
Almagestas 203
Andromedos galaktika 206
Andromedos ūkas 225
apibrėžimo sritis 146
apšvitos (efektinė) dozė 86
Archimedas 203
Aristarchas 213
astronominis vienetas (a.v.) 218
atominė bomba 102
atominės masės vienetas (a.m.v.) 62
atominis reaktorius 97
atomo branduolys 61
atomo masė 63
atsitiktinis dydis 186
atsitiktinė imtis 195
atsitiktinumas 186
atspindys 110
atspindys, horizontalusis 110
atspindys, slenkamasis 111
atspindys, vertikalusis 110
atspindys, visiškas 179
augimas
augimas, eksponentinis (rodiklinis) 28
augimas, kartotinis 33
augimas, kombinuotasis 47
augimas, slopinamas 43
augimas, suminis 27
augimas, tiesinis 28
aukso skaičius 292
Avogadro skaičius (N_A) 63

β dalelė 64
bazė 120, 121
bazė, silpna 128
bazė, stipri 128
bazinis eksperimentas 186
Bekerelis A. 59
bekerelis (Bq) 71
Beselis F. 219
binominis modelis 186
Brahė T. 208
branduolys, atomo 61
branduolio masė 62
branduolių dalijimasis (skilimas) 93
branduolių jungimasis (sintezė) 93

chromosoma 290
cefeidė 222
cezis (Cs) 83

dangaus polius 200
daugianaris 151
daugianaris, pirmojo laipsnio 151, 154
daugianaris, antrojo laipsnio 151, 156
daugianaris, trečiojo laipsnio 151, 161
dekada, pagrindinė 41
Didysis sprogimas 232
Didysis sutriuškinimas 233
drakono metai 293
drakono mėnuo 293
dvigubėjimo konstanta 38
dvigubėjimo periodas 38

efektinė dozė 86
Einšteinas A. 89
ekliptika 200
ekscentrinė orbita 205
eksponentinė funkcija 42
eksponentinės funkcijos pagrindas 35
elektronas (β^- dalelė) 65
elipsė 296
energija 88
energijos sugėrimas 92
epakta 292
epiciklas 293
Eratostenas 203
Euklidas 203

fotosintezė 78
fundamentalusis postūmis 114
funkcija 143

funkcijos grafikas 145
funkcijos kitimas 148
funkcijos minimumas 149
funkcijos maksimumas 149

galaktika 223
Geigerio skaitiklis 60, 195, 251
grafikas 145
grafiko transformacijos 153
grąžinimo laikas 24

Hablas E. 225
Hablo konstanta 303
helio branduolys (α dalelė) 64
horizontalusis atspindys 110

izotopas 61
įmoka (anuitetas) 24
įžambinė 169

jautrumo koeficientas 86
jodas 83

Kepleris J. 210
Keplerio dėsniai 212, 213
kintamasis 143
kintamasis, nepriklausomas 144
kintamasis, priklausomas 144
kitimo sritis 146
Kiuri (Sklodovska) M. 59
Kiuri P. 59
koncentracija 130, 131
koncentracija, molinė 130
konfigūracijos:
jungtis 201
kvadratūra 201
opozicija 201
koordinačių sistema:
stačiakampė 29
pusiau logaritminė 40
logaritminė 41
kosinusas 167
krizinė masė 102
krūvio skaičius 61
kvazaras 230

laipsninė funkcija 55
lakmuso popierėlis 122, 265
Le Korbiuzjė 262
Levit H. 223
lėtiklis 97
logaritminė skalė 40
lūžio rodiklis 174

megaelektronvoltas (MeV) 90
metodas (^{14}C metodas) 69
Metono ciklas 292
Mėnulio fazės 295
molis 63

neutrinas 66
neutronas 61
neutronas, lėtas 96
neutroninė bomba 102
neutrali medžiaga 121
normaliai pasiskirstę dydžiai 193
nukleonas 61
nuolaida 13

okultacija 201
organizmo balastas 49
ornamentai 107, 112

pagrindinis raštas 112
pakartotinis sugavimas 195
palūkanos 19, 36
palūkanos, kintamosios 19
palūkanos, sudėtinės 19
palūkanos, vidutinės 19
palūkanų norma 19
paralaksas 218, 299
paskola 22
paskola, išmokų 25
paskola, mišrioji 241
paskola, tolygaus išsimokėjimo 24
Paukščių Takas 223
Paulis W. 66
pH (rūgštingumo rodiklis) 134
plazma 100, 101
postūmis 109
posūkis 111
pozitronas 66
pradinė skola 24
procentas 11
protonai 61
prototipas 152
Ptolemajas 175
Ptolemajo pasaulio vaizdas 203
pusamžis (puslaikis) 69
puskiekio konstanta 38
puskiekio periodas 38

radioaktyvumas 58
radioanglies (^{14}C) datavimo metodas 76
radis (Ra) 59
radonas (Rn) 81
raudonasis poslinkis 229, 232
reakcijos:
oksidacijos–redukcijos 140
rūgščių–bazių 140
reaktorius 97
reaktorius, branduolių sintezės 97
reaktorius, verdančio vandens 97
reliatyvumo teorija 89
Remeris O. 214
retieji įvykiai 193
ribinė vertė 131
ribinis kampas 179
rimties masė 89
rūgštingumo (pH) rodiklis 124
rūgštis 120
rūgštis, silpna 128
rūgštis, stipri 128
rūgštusis lietus 136

saro ciklas 293
sėkmių skaičius 187
sėkmių tikimybė 187
simetrija 108
simetrija, netriviali 115
simetrija, postūmio 115
simetrija, posūkio 114
sinodinis periodas 298
sinusas 166
skilimai (α, β, γ) 63
skilimo dėsnis 68
skilimo konstanta 71
sklaidos kampas 184
skolos koeficientas 25
slenkamasis atspindys 111
spinduliavimas (γ) 68
spindulinė liga 87
spinduliuotė 59, 81
spinduliuotė, foninė 60
spinduliuotė, jonizuojanti 84
spinduliuotė, radioaktyvioji 61
spinduliuotė, Rentgeno 84
standartinis nuokrypis 186
statínis 169
stroncis (Sr) 83
sugerties dozė 85
suminė tikimybė 192
sunkieji metalai 47
superspiečius 227

šiltnamio efektas 142
šviesmetis 219
šviesolaidis 286
šviesos lūžimas 173

taisyklingasis daugiakampis 295
taisyklingasis briaunainis 295
tangentas 173
taupymas 22
taupymas, tolygus (reguliarus) 22
taupos koeficientas 23
tiesės krypties koeficientas 30
titravimas 133
toleruotina dienos dozė 50
trigonometrija 168

Ulugbekas 206, 294
uranas 59

vaivorykštė 183
vandenilinė bomba 102
vertikalusis atspindys 110
vidurkis 186
visiškas atspindys 179
visuotinės traukos jėga 216

zyvertas (Sv) 86

žvaigždžių dangus 205
žvaigždžių gyvenimas 95
žvaigždžių spiečius 224

Jaunas mėnulis (J) ir pilnatis (P) 1998–2000 metais

1998		1999		2000	
J	P	J	P	J	P
	sausio 12		sausio 2	sausio 6	sausio 21
sausio 28	vasario 11	sausio 17	sausio 31	vasario 5	vasario 19
vasario 26	kovo 13	vasario 16	kovo 2	kovo 6	kovo 20
kovo 28	balandžio 11	kovo 17	kovo 31	balandžio 4	balandžio 18
balandžio 26	gegužės 11	balandžio 16	balandžio 30	gegužės 4	gegužės 18
gegužės 25	birželio 10	gegužės 15	gegužės 30	birželio 2	birželio 16
birželio 24	liepos 9	birželio 13	birželio 28	liepos 1	liepos 16
liepos 23	rugpjūčio 8	liepos 13	liepos 28	liepos 31	rugpjūčio 15
rugpjūčio 22	rugsėjo 6	rugpjūčio 11	rugpjūčio 26	rugpjūčio 29	rugsėjo 13
rugsėjo 20	spalio 5	rugsėjo 9	rugsėjo 25	rugsėjo 27	spalio 13
spalio 20	lapkričio 4	spalio 9	spalio 24	spalio 27	lapkričio 11
lapkričio 19	gruodžio 3	lapkričio 8	lapkričio 23	lapkričio 25	gruodžio 11
gruodžio 18		gruodžio 7	gruodžio 22	gruodžio 25	

Veneros ir Saulės ekliptinių ilgumų skirtumai

	1998	1999	2000
Sausis	+23	+15	−39
Vasaris	−23	+22	−33
Kovas	−43	+29	−26
Balandis	−46	+35	−19
Gegužė	−44	+41	−11
Birželis	−38	+45	−3
Liepa	−31	+44	+5
Rugpjūtis	−24	+27	+14
Rugsėjis	−16	−17	+22
Spalis	−8	−42	+30
Lapkritis	0	−46	+37
Gruodis	+8	−44	+42

Jupiterio ekliptinė ilguma

	1998	1999	2000
Sausis	322	352	25
Vasaris	329	357	28
Kovas	336	4	33
Balandis	343	11	39
Gegužė	350	18	46
Birželis	355	25	54
Liepa	358	30	60
Rugpjūtis	358	34	66
Rugsėjis	355	35	70
Spalis	351	33	71
Lapkritis	348	29	70
Gruodis	349	26	66

Marso ekliptinė ilguma

	1998	1999	2000
Sausis	311	198	328
Vasaris	335	212	352
Kovas	357	220	14
Balandis	21	221	37
Gegužė	43	212	58
Birželis	66	205	80
Liepa	86	209	100
Rugpjūtis	107	221	120
Rugsėjis	127	239	140
Spalis	146	259	159
Lapkritis	165	281	178
Gruodis	182	304	196

Saturno ekliptinė ilguma

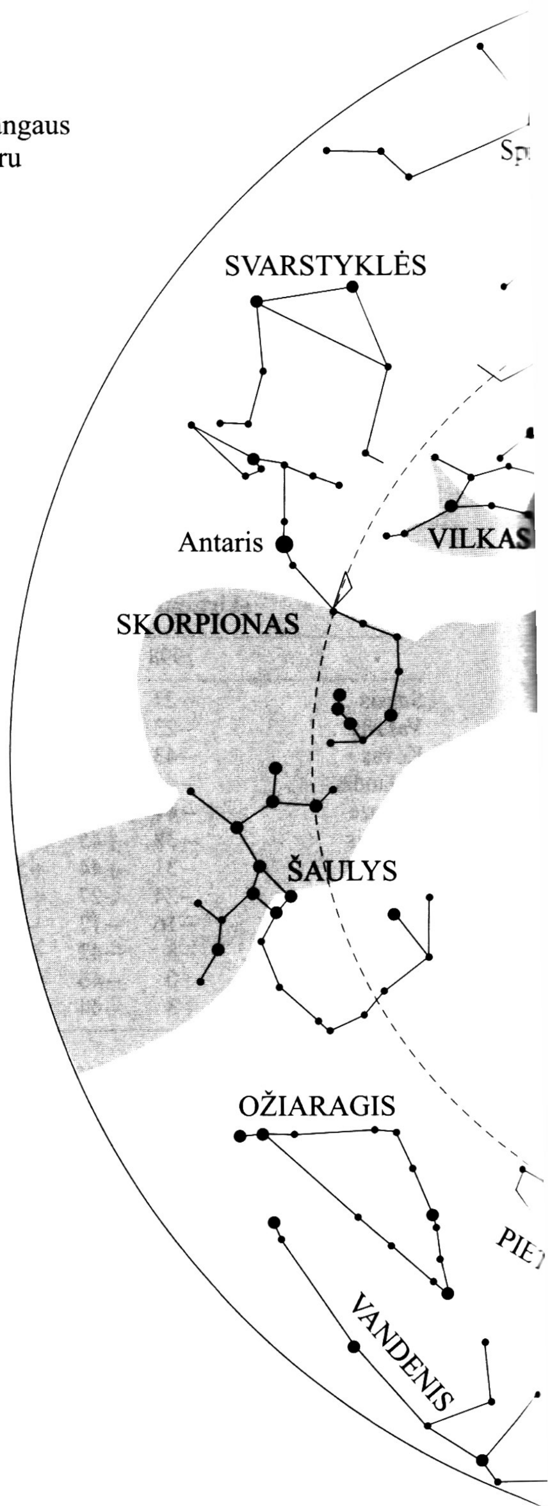
	1998	1999	2000
Sausis	14	27	40
Vasaris	15	28	41
Kovas	18	30	42
Balandis	22	33	46
Gegužė	26	37	49
Birželis	29	37	49
Liepa	32	44	57
Rugpjūtis	33	46	59
Rugsėjis	33	47	61
Spalis	32	46	61
Lapkritis	30	44	59
Gruodis	28	42	57

Pastaba. Planetų padėtys pateiktos kiekvieno mėnesio 1 d.

Pietų pusrutulio dangus

Išorinis apskritimas – dangaus pusiaujas.
Sritis tarp išorinio ir brūkšninio apskritimo – dangaus skliauto dalis, kurią Šiaurės pusrutulyje tam tikru metų laiku galima pamatyti žemai prie pietinio horizonto. Brūkšninio apskritimo viduje – dangaus sritis, kuri Šiaurės pusrutulyje niekada nepateka. Pačiame žvaigždėlapio centre – pietinis dangaus polius. Jis yra Oktanto žvaigždyne, neturinčiame įsidėmėtinų didelio spindesio žvaigždžių.

Didysis ir Mažasis Magelano Debesys (DMD ir MMD) – tai artimiausios plika akimi gerai matomos galaktikos – mūsų galaktikos palydovės.
Iki DMD yra 170 000 šviesmečių, iki MMD – 210 000 šviesmečių.



Ryškiausi Pietų pusrutulio žvaigždynai

ARGONAUTŲ LAIVAS
AUKSO ŽUVIS
ERIDANAS (Achernaras)
FENIKSAS
GERVĖ
HIDRA
KENTAURAS
KIŠKIS
KOMPASAS
KRYŽIUS
KROSNIS
OKTANTAS
PIETŲ TRIKAMPIS
PIETŲ VAINIKAS
PIETŲ ŽUVIS (Fomalhautas)
POVAS
SIURBLYS
SKORPIONAS (Antaris)
SKULPTORIUS
ŠAULYS
TAPYTOJAS
TUKANA
VILKAS

ERGELĖ

H I D R A

KENTAURAS

KRYŽIUS

Agena

imanas

MUSĖ

ARGONAUTŲ LAIVAS

Sirijus

ŠUO

Kanopas

Didysis Magelano Debesis

POVAS

AUKSO ŽUVIS

ORIONAS

Alnilamkas

Alnitakas

Mintaka

KIŠKIS

Mažasis Magelano Debesis

Rygelis

TUKANA

Achernaras

E R I D A N A S

ERVĖ

FENIKSAS

Fomalhautas

VIS

BANGINIS

PERIODINĖ CHEMINIŲ ELEMENTŲ LENTELĖ

Elemento simbolis → Fe; Elemento numeris → 26; Pavadinimas → Geležis; 55,847 ← Atominė masė*

Grupės numeris: dabartinis (5), senasis (VB)

1 IA	2 IIA	3 IIIB	4 IVB	5 VB	6 VIB	7 VIIB	8 VIII	9 VIII	10 VIII	11 IB	12 IIB	13 IIIA	14 IVA	15 VA	16 VIA	17 VIIA	18 0
1,0079 H 1 Vandenilis																	4,0026 He 2 Helis
6,941 Li 3 Litis	9,0122 Be 4 Berilis											10,811 B 5 Boras	12,011 C 6 Anglis	14,0067 N 7 Azotas	15,9994 O 8 Deguonis	18,9984 F 9 Fluoras	20,1797 Ne 10 Neonas
22,9898 Na 11 Natris	24,3050 Mg 12 Magnis											26,9815 Al 13 Aliuminis	28,0855 Si 14 Silicis	30,9738 P 15 Fosforas	32,066 S 16 Siera	35,4527 Cl 17 Chloras	39,948 Ar 18 Argonas
39,0983 K 19 Kalis	40,078 Ca 20 Kalcis	44,9559 Sc 21 Skandis	47,88 Ti 22 Titanas	50,9415 V 23 Vanadis	51,9961 Cr 24 Chromas	54,9380 Mn 25 Manganas	55,847 Fe 26 Geležis	58,9332 Co 27 Kobaltas	58,69 Ni 28 Nikelis	63,546 Cu 29 Varis	65,39 Zn 30 Cinkas	69,723 Ga 31 Galis	72,61 Ge 32 Germanis	74,9216 As 33 Arsenas	78,96 Se 34 Selenas	79,904 Br 35 Bromas	83,80 Kr 36 Kriptonas
85,4678 Rb 37 Rubidis	87,62 Sr 38 Stroncis	89,9058 Y 39 Itris	91,224 Zr 40 Cirkonis	92,9064 Nb 41 Niobis	95,94 Mo 42 Molibdenas	(97,905) Tc 43 Technecis	101,07 Ru 44 Rutenis	102,9055 Rh 45 Rodis	106,42 Pd 46 Paladis	107,8682 Ag 47 Sidabras	112,411 Cd 48 Kadmis	114,82 In 49 Indis	118,710 Sn 50 Alavas	121,75 Sb 51 Stibis	127,60 Te 52 Telūras	126,9045 I 53 Jodas	131,29 Xe 54 Ksenonas
132,9054 Cs 55 Cezis	137,327 Ba 56 Baris	La-Lu 57-71	178,49 Hf 72 Hafnis	180,9479 Ta 73 Tantalas	183,85 W 74 Volframas	186,207 Re 75 Renis	190,2 Os 76 Osmis	192,22 Ir 77 Iridis	195,08 Pt 78 Platina	196,9665 Au 79 Auksas	200,59 Hg 80 Gyvsidabris	204,3833 Tl 81 Talis	207,2 Pb 82 Švinas	208,9804 Bi 83 Bismutas	(208,982) Po 84 Polonis	(209,987) At 85 Astatis	(222,018) Rn 86 Radonas
(223,020) Fr 87 Francis	(226,025) Ra 88 Radis	Ac-Lr 89-103	(261,1) Ku 104 Kurčiatovis	(262,1) Ns 105 Nilsboris	(263,1) 106	(262,1) 107	(265,1) 108	(266,1) 109	110	111	112						

* Masė skliausteliuose – žinomų izotopų masės vidurkis

138,9055 La 57 Lantanas	140,115 Ce 58 Ceris	140,9077 Pr 59 Prazeodimis	144,24 Nd 60 Neodimis	(144,913) Pm 61 Prometis	150,36 Sm 62 Samaris	151,965 Eu 63 Europis	157,25 Gd 64 Gadolinis	158,9253 Tb 65 Terbis	162,50 Dy 66 Disprozis	164,9303 Ho 67 Holmis	167,26 Er 68 Erbis	168,9342 Tm 69 Tulis	173,04 Yb 70 Iterbis	174,967 Lu 71 Liutecis
(227,028) Ac 89 Aktinis	232,0381 Th 90 Toris	(231,036) Pa 91 Protaktinis	238,0289 U 92 Uranas	(237,048) Np 93 Neptunis	(244,064) Pu 94 Plutonis	(243,061) Am 95 Americis	(247,07) Cm 96 Kiuris	(247,07) Bk 97 Berklis	(251,08) Cf 98 Kalifornis	(252,08) Es 99 Einšteinis	(257,095) Fm 100 Fermis	(258,099) Md 101 Mendelevis	(259,1) No 102 Nobelis	(260,1) Lr 103 Lourensis

Cheminių elementų abėcėlinis sąrašas

Elementas	Simbolis	Atominis skaičius	Elementas	Simbolis	Atominis skaičius	Elementas	Simbolis	Atominis skaičius
Aktinis	**Ac**	89	Gyvsidabris	**Hg**	80	Platina	**Pt**	78
Alavas	**Sn**	50	Hafnis	**Hf**	72	Plutonis	**Pu**	94
Aliuminis	**Al**	13	Helis	**He**	2	Polonis	**Po**	84
Americis	**Am**	95	Holmis	**Ho**	67	Prazeodimis	**Pr**	59
Anglis	**C**	6	Indis	**In**	49	Prometis	**Pm**	61
Argonas	**Ar**	18	Iridis	**Ir**	77	Protaktinis	**Pa**	91
Arsenas	**As**	33	Iterbis	**Yb**	70	Radis	**Ra**	88
Astatinas	**At**	85	Itris	**Y**	39	Radonas	**Rn**	86
Auksas	**Au**	79	Jodas	**I**	53	Renis	**Re**	75
Azotas	**N**	7	Kadmis	**Cd**	48	Rodis	**Rh**	45
Baris	**Ba**	56	Kalcis	**Ca**	20	Rubidis	**Rb**	37
Berilis	**Be**	4	Kalifornis	**Cf**	98	Rutenis	**Ru**	44
Berklis	**Bk**	97	Kalis	**K**	19	Samaris	**Sm**	62
Bismutas	**Bi**	83	Kiuris	**Cm**	96	Selenas	**Se**	34
Boras	**B**	5	Kobaltas	**Co**	27	Sidabras	**Ag**	47
Bromas	**Br**	35	Kriptonas	**Kr**	36	Siera	**S**	16
Ceris	**Ce**	58	Ksenonas	**Xe**	54	Silicis	**Si**	14
Cezis	**Cs**	55	Lantanas	**La**	57	Skandis	**Sc**	21
Chloras	**Cl**	17	Litis	**Li**	3	Stroncis	**Sr**	38
Chromas	**Cr**	24	Liutecis	**Lu**	71	Stibis	**Sb**	51
Cinkas	**Zn**	30	Lourensis	**Lr**	103	Švinas	**Pb**	82
Cirkonis	**Zr**	40	Magnis	**Mg**	12	Talis	**Tl**	81
Deguonis	**O**	8	Manganas	**Mn**	25	Tantalas	**Ta**	73
Disprozis	**Dy**	66	Mendelevis	**Md**	101	Technecis	**Tc**	43
Einšteinis	**Es**	99	Molibdenas	**Mo**	42	Telūras	**Te**	52
Erbis	**Er**	68	Natris	**Na**	11	Terbis	**Tb**	65
Europis	**Eu**	63	Neodimis	**Nd**	60	Titanas	**Ti**	22
Fermis	**Fm**	100	Neonas	**Ne**	10	Toris	**Th**	90
Fluoras	**F**	9	Neptūnis	**Np**	93	Tulis	**Tm**	69
Fosforas	**P**	15	Nikelis	**Ni**	28	Vanadis	**V**	23
Francis	**Fr**	87	Niobis	**Nb**	41	Vandenilis	**H**	1
Gadolinis	**Gd**	64	Nobelis	**No**	102	Varis	**Cu**	29
Galis	**Ga**	31	Osmis	**Os**	76	Volframas	**W**	74
Geležis	**Fe**	26	Paladis	**Pd**	46	Uranas	**U**	92
Germanis	**Ge**	32						

Knygoje panaudotos A. Rudaičio (120 psl. ir įklijos V pav.) ir G. Kakaro (įklijos XIX pav.) nuotraukos.

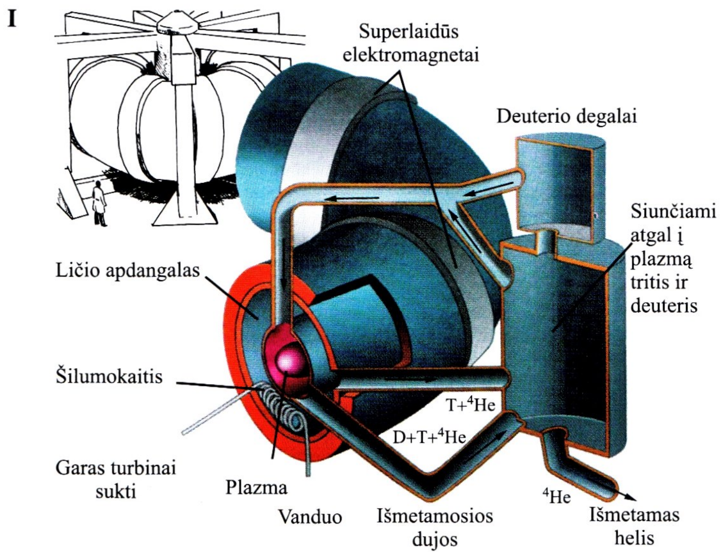
B. Felsager, K. Jakobsen, G. Schomacker, M. Vedelsby

Tikslieji mokslai humanitarams. II dalis

(vertimas iš danų kalbos)

SL 1185. 1999 09 28. 20,5 sp. l. Tiražas 4500 egz. Užs. Nr. 936
Leidykla TEV, Akademijos g. 4, LT-2600 Vilnius
Spausdino Spec. paskirties AB spaustuvė „Spindulys“,
Gedimino g. 10, LT-3000 Kaunas

I



II



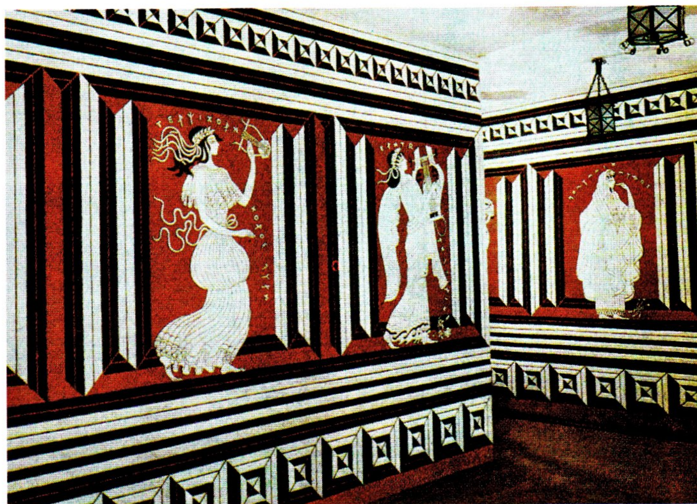
I pav. Branduolių sintezės reaktorius.

II pav. Iki 15 km aukščio išaugęs grybo pavidalo debesis susprogdinus atominę bombą Nevados dykumoje (1957).

III



IV

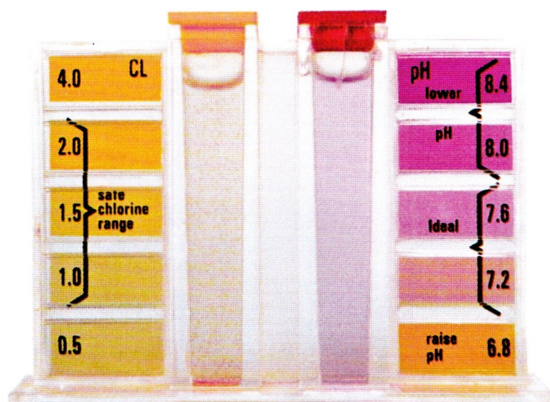


Ornamentų simetrijos pavyzdžiai.

III pav. Sgrafito technika dekoruota XVI–XVII a. pastato Aušros Vartų gatvėje (Vilniuje) siena.

IV pav. Vilniaus universiteto Filologijos fakulteto interjero dalis (dail. R. Gibavičius).

V

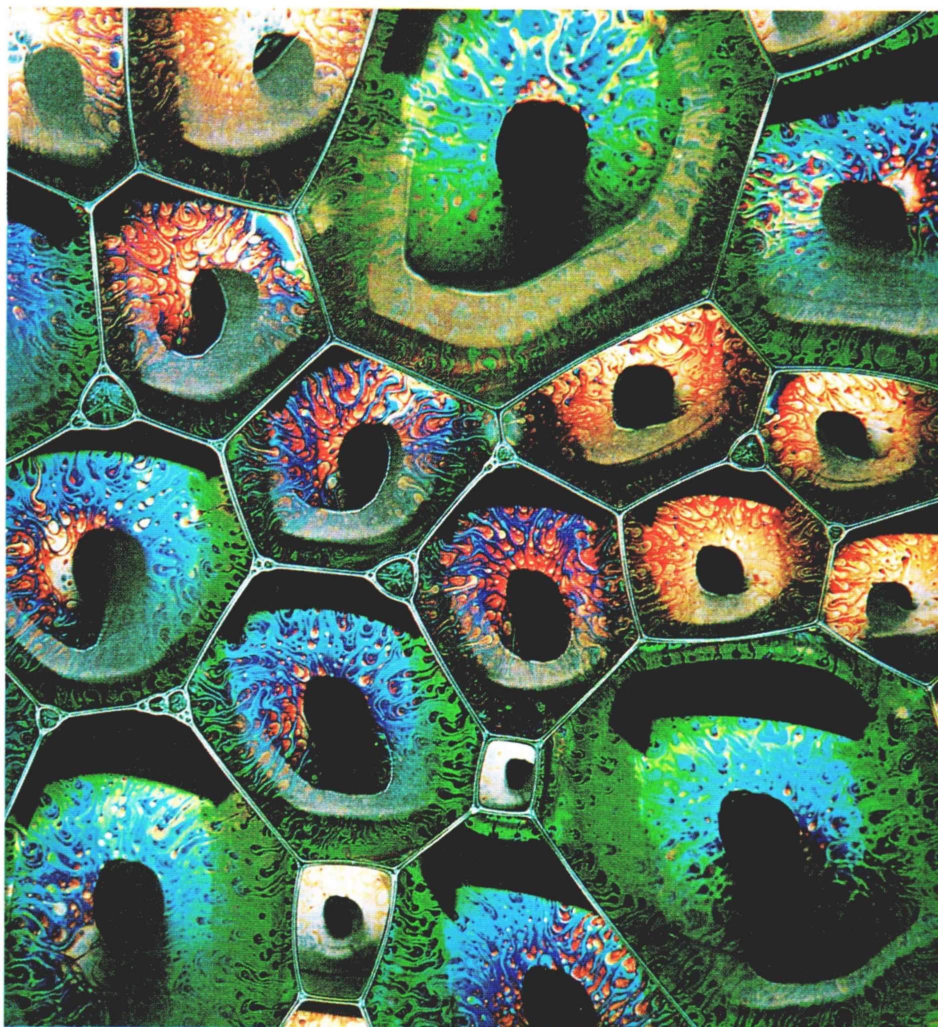


VI

V pav. Buitinis indikatorius vandens pH matuoti. Pasėmus vandens iš baseino, kairiojo indelio turinys nusidažo gelsva spalva, kurios intensyvumas rodo chloro kiekį, dešiniojo indelio – parausta priklausomai nuo vandens rūgštingumo.

VI pav. Niokojantis rūgščiojo lietaus poveikis.

VII

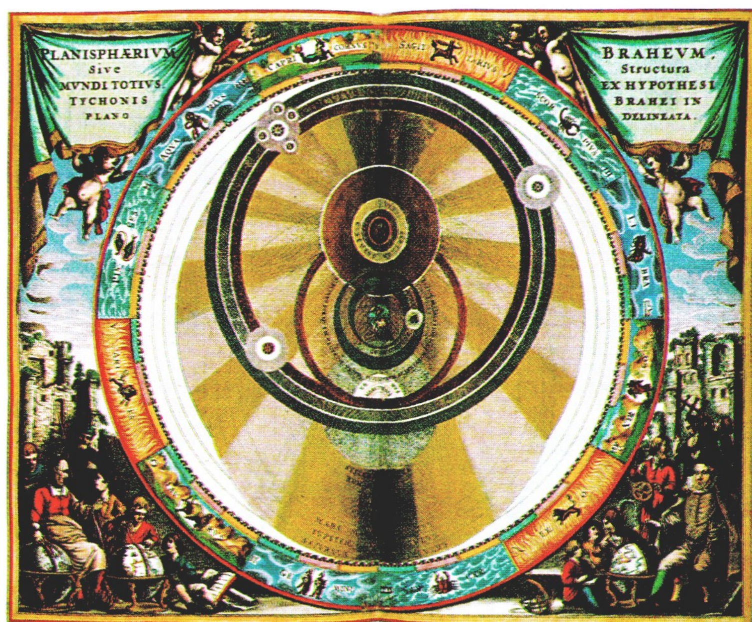


VII pav. Įvairiaspalviai muilo burbulai.
Į plonytes burbulų sieneles krintantys šviesos spinduliai atspindimi arba lūžta įvairiais kampais ir švyti visomis spektro spalvomis.

VIII



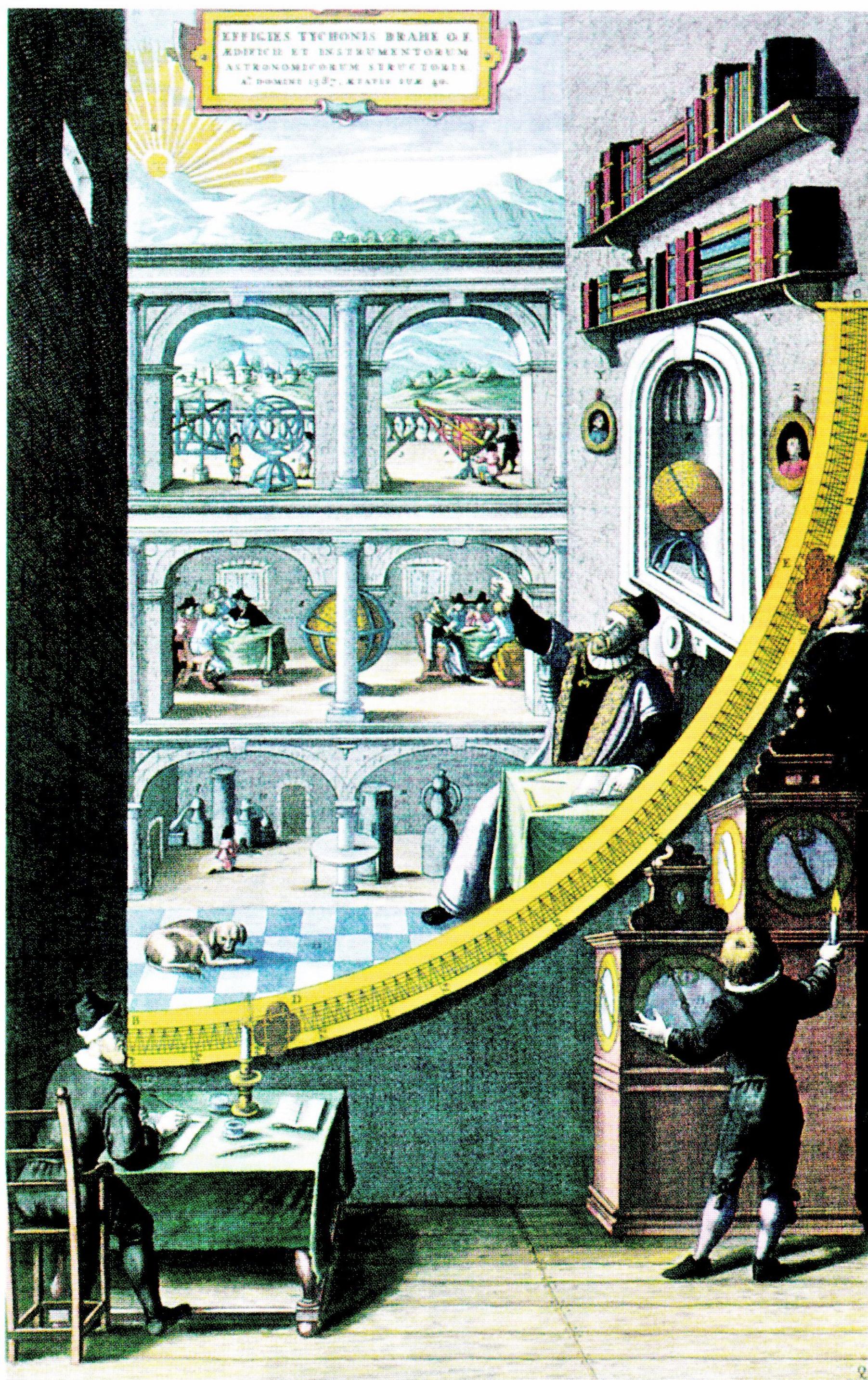
IX



VIII pav. N. Koperniko heliocentrinis pasaulio vaizdas.

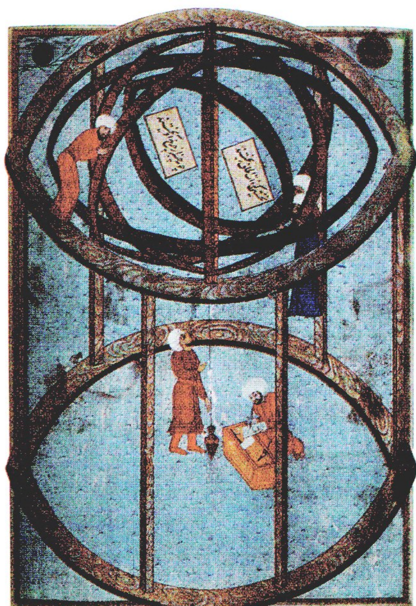
IX pav. T. Brahės planetų sistema (pieš. iš XVII a. rankraščio).

X

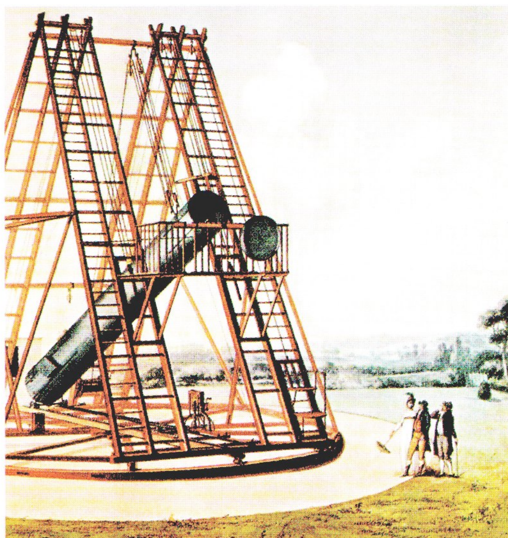


X pav. T. Brahės observatorijos Veno saloje svarbiausias tikslusis prietaisas – sieninis kvadrantas.

XI



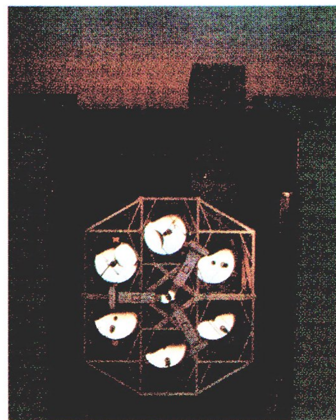
XII



XIII



XIV



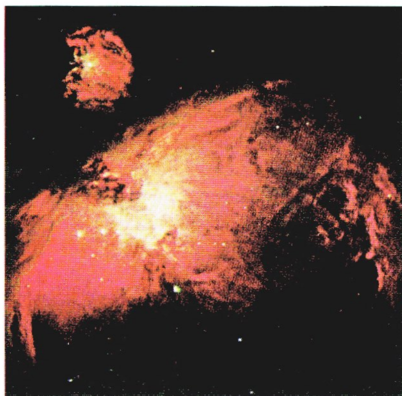
XI pav. Armiliarinės sferos (metalinių lankų sistemos, viduramžių mokslininkų naudotos dangaus koordinatėms nustatyti) medinė konstrukcija (pieš. iš XVII a. rankraščio).

XII pav. J. Heršelio reflektorius (gremėzdiškas XVIII a. veidrodinis teleskopas).

XIII pav. Teleskopai Mauna Kea (Havajai) ugnikalnio viršūnėje.

XIV pav. Veidrodinis teleskopas Maunt Hopkinso observatorijoje (JAV, Arizonos valstija).

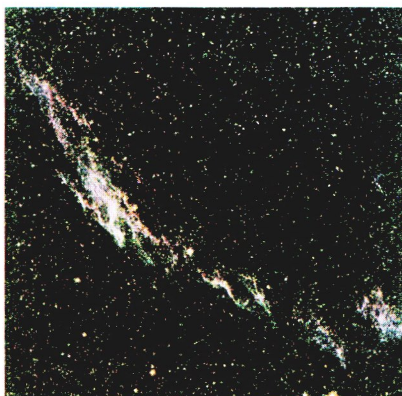
XV



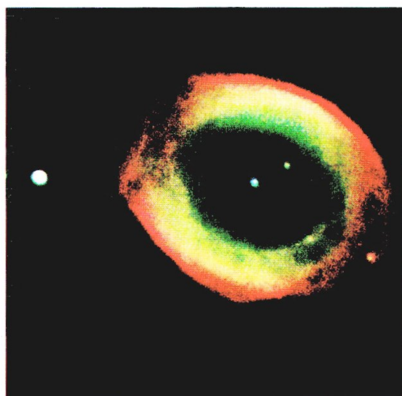
XVI



XVII



XVIII



XIX



XV pav. Didysis Oriono ūkas. Iš tokių gimsta žvaigždės.

XVI pav. Plejados – jaunos žvaigždės, dar apsuptos dujų debesų, iš kurių yra susidariusios.

XVII pav. Gulbės ūkas. Jis susidarė užgesus didelei žvaigždei.

XVIII pav. Lyros ūkas. Užgesus mažai žvaigždei, jos išoriniai sluoksniai atsiskyrė ir sudarė aplink ją žiedinį ūką.

XIX pav. Heilo–Bopo kometa (1997 m. jos skriejimo orbita buvo arti Saulės sistemos). Nuotraukoje matoma meteoro trajektorija.